

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ
в качестве лабораторного практикума для студентов очной
и заочной форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки
бакалавров 15.03.01 «Машиностроение»,
24.03.04 «Авиационное строительство»,
24.03.05 «Двигатели летательных аппаратов»*

Уфа 2019

УДК 000000
ББК 000000
Т33

Рецензенты:

*заведующий кафедрой физики УГНТУ, д-р физ.-мат. наук, профессор,
член-корр. АН РБ И. К. Гималтдинов,
директор Физико-технического института БашГУ
д-р физ.-мат. наук, профессор Р. А. Якшибаев*

Теоретическая механика : лабораторный практикум / [В. М. Грешнов, Т33 и др.] ; Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: РИК УГАТУ, 2019. – 219 с.
ISBN

Даны описания и руководства по выполнению пятнадцати лабораторных работ по трем разделам дисциплины «Теоретическая механика»: статика, кинематика и динамика. Практикум позволяет преподавателю выбрать работы для проведения лабораторных занятий со студентами разных направлений подготовки и специальностей. При подготовке описаний работ учитывались особенности задач преподавания дисциплины «Теоретическая механика» в высшей технической школе.

Предназначен для студентов, изучающих курс теоретической механики.

УДК 000000
ББК 000000

© Корректурa и верстка. РИК УГАТУ, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. СТАТИКА.....	5
1.1. Лабораторная работа № 1. Определение положения центра тяжести плоских фигур.....	5
1.2. Лабораторная работа № 2. Проверка законов трения скольжения.....	17
1.3. Лабораторная работа № 3. Изучение произвольной плоской системы сил.....	27
2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	37
2.1. Лабораторная работа № 4. Изучение свободных прямолинейных колебаний материальной точки (компьютеризированная).....	37
2.2. Лабораторная работа № 5. Изучение прямолинейных затухающих колебаний материальной точки (компьютеризированная).....	54
2.3. Лабораторная работа № 6. Изучение кориолисовой силы инерции при относительном движении материальной точки.....	69
3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	79
3.1. Лабораторная работа № 7. Изучение и опытное определение геометрических характеристик распределения масс в твердом теле.....	79
3.2. Лабораторная работа № 8. Экспериментальные методы определения моментов инерции тел сложной формы (компьютеризированная).....	106
3.3. Лабораторная работа № 9. Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для определения момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (компьютеризированная).....	117
3.4. Лабораторная работа № 10. Изучение колебательного движения маятника.....	129
3.5. Лабораторная работа № 11. Вынужденные колебания диска с одной степенью свободы.....	149
3.6. Лабораторная работа № 12. Исследование динамических реакций опорных подшипников вращающегося тела.....	168
3.7. Лабораторная работа № 13. Статическое уравнивание роторов.....	185
3.8. Лабораторная работа № 14. Статическое и динамическое уравнивание роторов.....	190
3.9. Лабораторная работа № 15. Изучение гироскопических явлений.....	195
Список литературы для самостоятельной проработки тем.....	212

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении многих лет мировой университетской истории лабораторный практикум по естественнонаучным дисциплинам играет важную роль как в подготовке специалистов самого широкого профиля, так и в их становлении в своей дальнейшей профессиональной деятельности.

Однако в некоторых случаях описания лабораторных работ нацелены на их формальное проведение. При этом остается в стороне научный дух изучаемой дисциплины, красота естественно-научных законов природы, гармония движения, метод научного познания, который она предлагает для исследования явлений природы, алгоритм его применения, что в совокупности формирует в данной научной дисциплине способ мышления, позволяющий специалисту решать задачи в конкретной области.

Отсюда тезис – лабораторные работы методически должны быть так организованы, чтобы студент при их выполнении повышал свой уровень образования изучая тему, а не просто выполнял работу, следуя инструкции в описании.

Сказанное особенно актуально для дисциплин естественнонаучного цикла, к которым относится теоретическая механика, одной из задач изучения которой является формирование научного способа мышления, мировоззрения образованного человека.

Подготавливая этот лабораторный практикум к изданию, кафедра старалась следовать сформулированному выше тезису, оставляя при этом главную роль преподавателю, ведущему лабораторное занятие.

1. СТАТИКА

1.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Тема: Определение положения центра тяжести плоских фигур.

1. Цели лабораторной работы

1.1. Изучение методов определения центра тяжести твердого тела, усвоение основных понятий и теоретических положений данной темы.

1.2. Расчет координат центра тяжести плоской фигуры и сопоставление с результатами эксперимента.

2. Задача лабораторной работы

Приобретение практических навыков определения положения центра тяжести плоских фигур.

3. Теоретические основы работы

При рассмотрении движения тел, особенно таких как самолеты, ракеты, космические корабли, большое значение имеет понятие центра тяжести. Для введения понятия центра тяжести разобьем мысленно рассматриваемое тело на достаточно большое число малых, по сравнению с телом, элементарных его частей произвольной формы.

На каждую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная приближенно к центру Земли сила, которую называют силой тяжести. Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с размерами Земли, силы тяжести, действующие на частицы тела, считаются параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела. Силовое поле, в котором выполняются указанные два условия, называется однородным полем тяжести. Модуль равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, называется *весом тела*. Равнодействующая сил тяжести проходит через точку, которая называется *центром тяжести тела*.

Таким образом, *центром тяжести твердого тела (точка С) называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела (рис. 3.1).*

Точка С – это геометрическая точка, она может находиться и вне тела, но она неизменно с ним связана, например, центр тяжести мяча, кольца и др.

В твердом теле центр тяжести занимает вполне определенное положение, которое не зависит от расположения рассматриваемого тела в пространстве.

Координаты центра тяжести твердого тела можно определить как координаты центра параллельных сил.

Обозначим модуль силы тяжести элементарной частицы тела с индексом i через P_i , а вес всего тела – через P ($P = \sum_{i=1}^n P_i$).

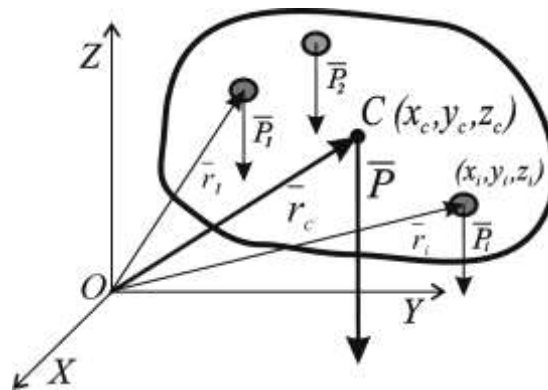


Рис. 3.1. Сила тяжести

Положение центра параллельных сил в векторной форме определяется формулой:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot P_i, \quad (3.1)$$

где \bar{r}_i – радиус-вектор i -й части тела.

Из (3.1) следуют формулы для определения координат центра тяжести (точки С) как центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i, \quad y_c = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i, \quad z_c = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i. \quad (3.2)$$

Вес P_i элементарной части однородного тела прямо пропорционален ее объему V_i : $P_i = \gamma \cdot V_i$.

Вес однородного тела P прямо пропорционален его объему V : $P = \gamma \cdot V$, где γ – вес единицы объема тела (удельный вес).

После подстановки значений P_i и P в выражения (3.2) получим формулы для определения координат центра тяжести однородного тела – *центра тяжести объема*:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i \cdot z_i. \quad (3.3)$$

Из полученных формул видно, что положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы.

Если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то координаты ее центра тяжести – *центра тяжести площади* – определяются следующим образом:

$$x_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i \cdot x_i, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i \cdot y_i, \quad z_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i \cdot z_i, \quad (3.4)$$

где S – площадь всей пластины; S_i – площади ее частей.

Координаты центра тяжести однородного длинного тонкого тела – *центра тяжести линии* – можно найти по формулам:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i \cdot x_i, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i \cdot y_i, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n L_i \cdot z_i, \quad (3.5)$$

где L – длина всей линии; l_i – длины ее участков.

4. Методы определения координат центра тяжести тела

4.1. Метод симметрии

При определении положения центра тяжести широко используется симметрия тел. Теорема о положении центра тяжести симметричного тела: *если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси, в этом центре.*

4.2. Метод разбиения на части (метод группировки)

Некоторые тела сложной формы можно разбить на части, центры тяжести которых известны или предварительно могут быть определены. В таких случаях центры тяжести сложных тел

вычисляются по общим формулам (3.2)–(3.5), определяющим центр тяжести, только вместо элементарных частиц тела берутся его конечные части, на которые оно разбито

Разновидностью метода разбиения является *метод отрицательных масс* (площадей или объемов). Этот метод применяется к телам, имеющим вырезы (полости). В этом случае также используются формулы (3.2)–(3.5), но вес (объем, площадь, длину) вырезанной части необходимо брать со знаком «минус».

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, представленной на рис. 4.1.

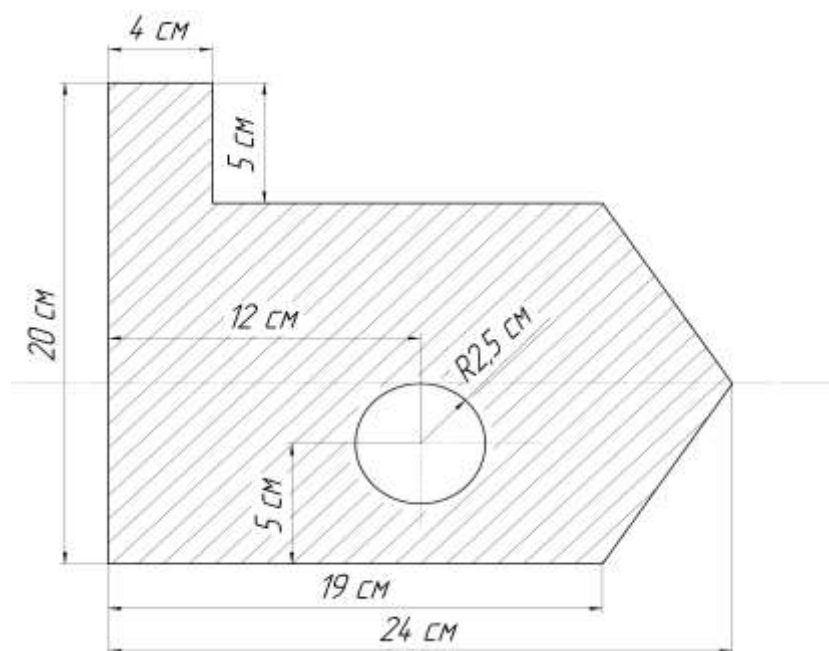


Рис. 4.1. Плоская фигура

Решение

1. Разбиваем плоскую фигуру на четыре простые части: два прямоугольника 1 и 3, треугольник 2 и круг 4 (рис. 4.2).

На рис. 4.2 показано положение центров тяжести некоторых плоских фигур. Например: центр тяжести прямоугольника находится в его геометрическом центре (точке пересечения его диагоналей).

2. Выбираем систему координат. Вычисляем площадь и координаты центра тяжести каждой части:

1 – прямоугольник: $S_1 = 19 \cdot 15 = 285 \text{ см}^2$;

координаты точки C_1 : $x_1 = 9,5 \text{ см}$; $y_1 = 7,5 \text{ см}$.

2 – треугольник: $S_2 = 15 \cdot 5 \cdot 1/2 = 37,5 \text{ см}^2$;

координаты точки C_2 : $x_2 = 19 + 5/3 = 20,7 \text{ см}$; $y_2 = 7,5 \text{ см}$.

3 – прямоугольник: $S_3 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ см}^2$;

координаты точки C_3 : $x_3 = 2 \text{ см}$; $y_3 = 15 + 5/2 = 17,5 \text{ см}$.

4 – круг: $S_4 = 3,14 \cdot 2,5^2 = 19,6 \text{ см}^2$;

координаты точки C_4 : $x_4 = 12 \text{ см}$; $y_4 = 5 \text{ см}$.

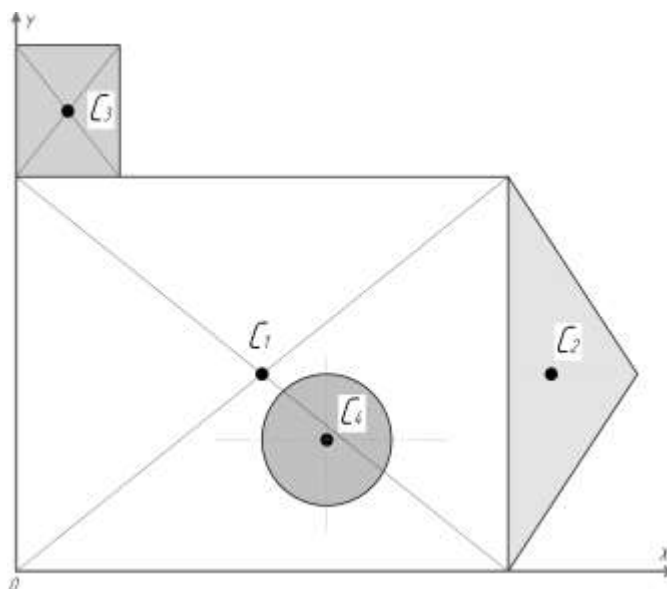


Рис. 4.2. Разбиение на простые части

3. Находим координаты центра тяжести всей фигуры. Площадь выреза (круга 4) берем со знаком минус.

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 - S_4 \cdot x_4}{S_1 + S_2 + S_3 - S_4} = \\&= \frac{285 \cdot 9,5 + 37,5 \cdot 20,7 + 20 \cdot 2 - 19,6 \cdot 12}{285 + 37,5 + 20 - 19,6} = 10,2 \text{ см}; \\y_c &= \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 - S_4 \cdot y_4}{S_1 + S_2 + S_3 - S_4} = \\&= \frac{285 \cdot 7,5 + 37,5 \cdot 7,5 + 20 \cdot 17,5 - 19,6 \cdot 5}{285 + 37,5 + 20 - 19,6} = 8,3 \text{ см}.\end{aligned}$$

4.3. Метод интегрирования (аналитический)

Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают сначала на произвольные малые объемы Δv_i , для которых формулы (3.3) принимают вид

$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \Delta v_i \cdot x_i \quad y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \Delta v_i \cdot y_i \quad z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \Delta v_i \cdot z_i, \quad (4.1)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты некоторой точки, лежащей внутри объема Δv_i .

Затем в равенствах (4.1) переходят к пределу, устремляя все Δv_i к нулю, то есть, стягивая эти объемы в точки. Тогда стоящие в равенствах суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела, и формулы (4.1) дают в пределе:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv.$$

Аналогично для координат центров тяжести площадей и линий получаем в пределе из формул (3.4) и (3.5):

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x ds, \quad y_c = \frac{1}{S} \int_S y ds;$$
$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_L y dl, \quad z_c = \frac{1}{L} \int_L z dl.$$

**Положение центра тяжести некоторых линий,
плоских фигур и тел**

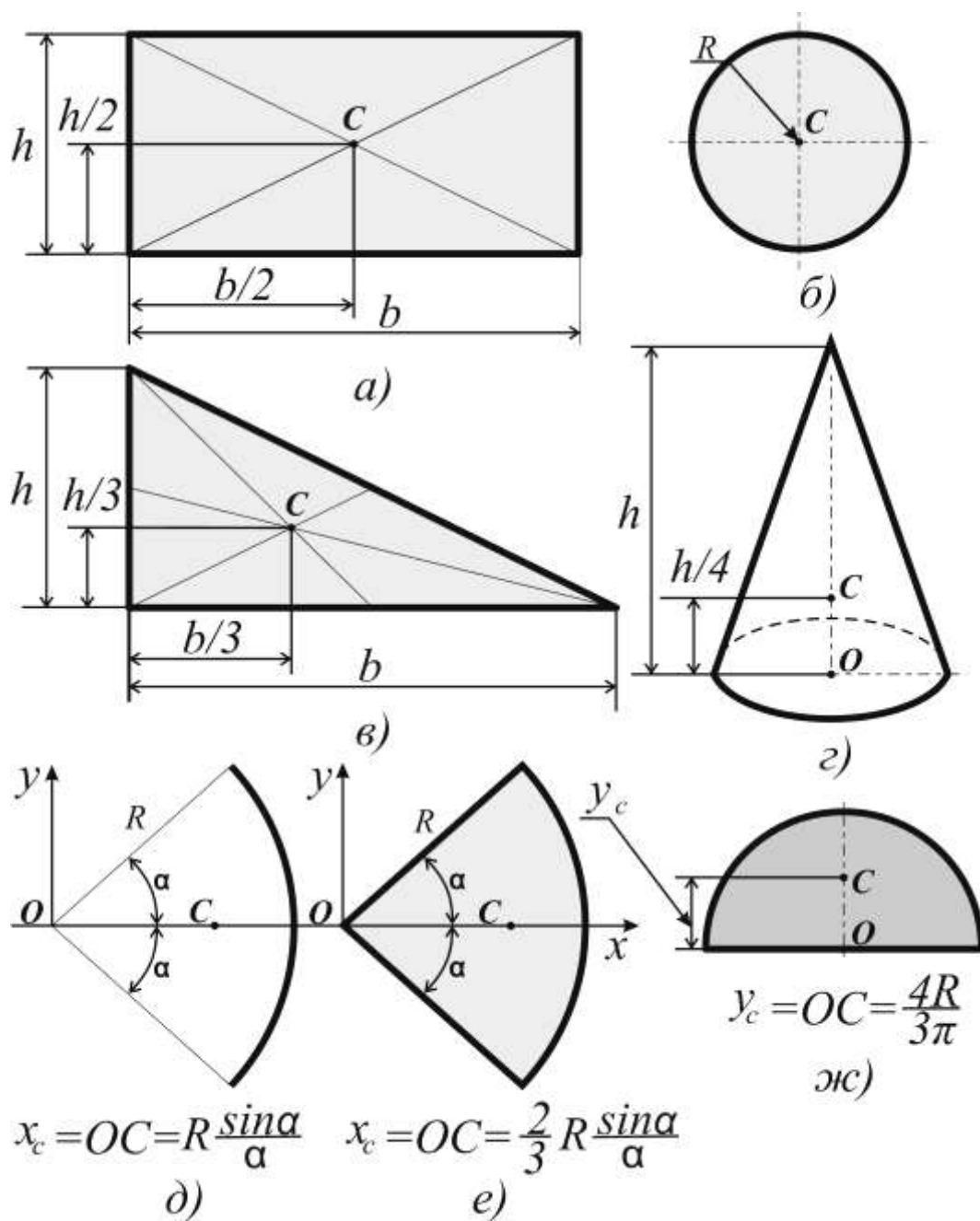


Рис. 4.3. Центры тяжести:

a – площади прямоугольника; $б$ – площади круга; $в$ – площади треугольника;
 $г$ – объема конуса; $д$ – дуги окружности; $е$ – площади кругового сектора;
 $ж$ – площади полукруга

4.4. Экспериментальный метод

Центр тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, локомотив, трактор и т.п.) можно определить экспериментально.

Одним из экспериментальных методов нахождения положения центра тяжести является *метод подвешивания*, заключающийся в том, что тело подвешивают за различные его точки на тросе или нити. При этом нить будет указывать направление, на котором находится центр тяжести тела. Точка пресечения этих направлений определяет положение центра тяжести тела.

Другим экспериментальным методом определения положения центра тяжести является *метод взвешивания*.

5. Оборудование

5.1. Установка для определения центра тяжести плоских фигур М5.

5.2. Набор плоских фигур, карандаш.

6. Устройство и принцип работы установки

Внешний вид установки М5 приведен на рис. 6.1.

Технические характеристики представлены в таблице.

Таблица

Технические характеристики установки М5

Габаритные размеры установки, мм, не более	длина	210
	ширина	210
	высота	350
Масса установки, кг, не более	4	

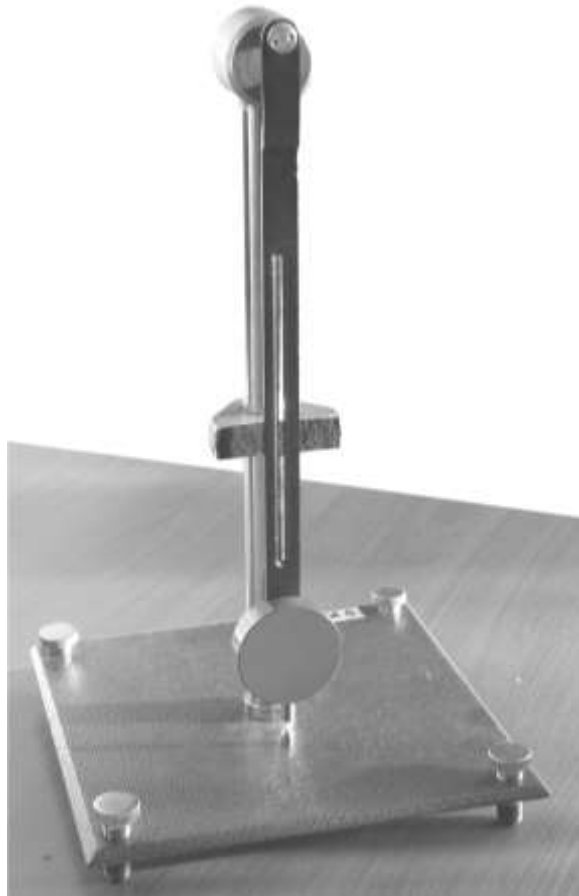


Рис. 6.1. Внешний вид установки М5 для определения центра тяжести плоских фигур

Схема установки М5 изображена на рис. 6.2. Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из основания 1 с вертикальной стойкой 2. Сверху на стойке закреплена головка 3 с двумя осями: на верхней оси закреплен отвес с прорезью 4 и грузом 5 на конце, на нижней – подвешивается плоская фигура из комплекта сменных фигур. В свободном состоянии отвес может поворачиваться относительно своей оси в вертикальной плоскости. Для того чтобы установить отвес в вертикальном положении используются регулируемые опоры 6. В средней части стойки установлен регулируемый по высоте упор 7, который позволяет прижать плоскую фигуру к отвесу. После этого на фигуре можно карандашом провести вертикальную линию по пазу отвеса.

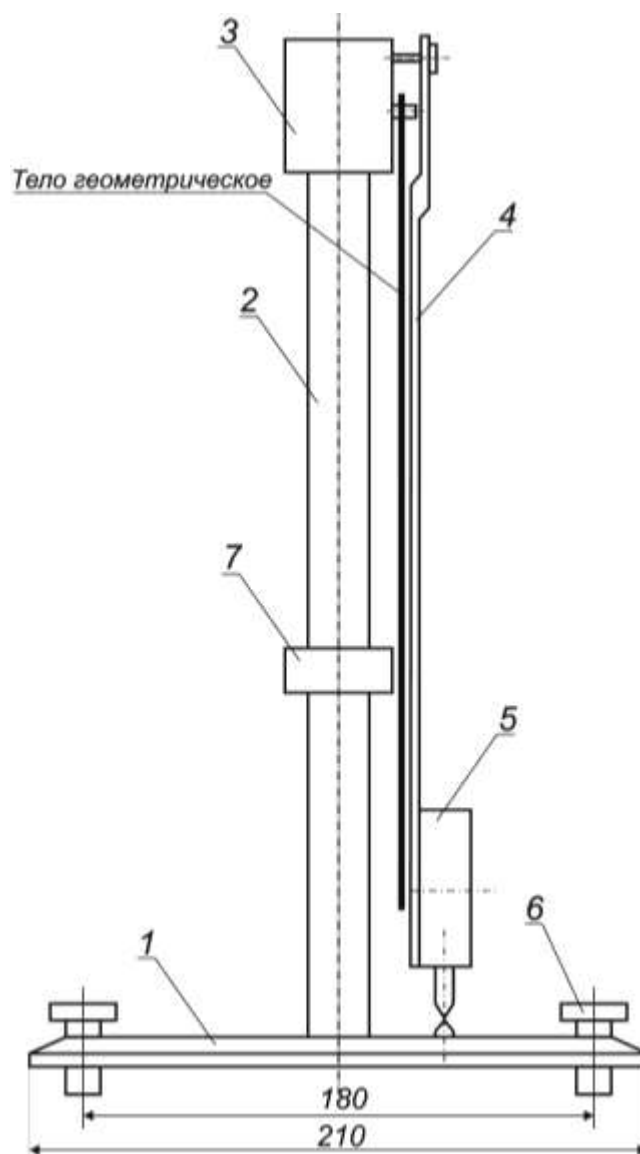


Рис. 6.2. Схема установки М5 для определения центра тяжести плоских фигур

7. Подготовка и порядок выполнения лабораторной работы

7.1. Поместите установку на ровной горизонтальной поверхности стола.

7.2. С помощью регулируемых опор 6, установите отвес 4 в вертикальном положении так, чтобы острый конец отвеса был совмещен с конической стрелкой на основании 1.

7.3. Поверните отвес 4 вокруг своей оси на некоторый угол. Подвесьте фигуру, центр тяжести которой необходимо определить, на нижнюю ось за одно из трех предусмотренных отверстий и медленно верните отвес в исходное положение.

7.4. Дождитесь прекращения колебаний фигуры. Зафиксируйте положение фигуры, зажав ее между упором 7 и отвесом 4, для чего медленно и осторожно подвиньте отвес вдоль оси от себя.

7.5. Вдоль центрального паза отвеса 4 проведите карандашом средней твердости вертикальную линию на плоской фигуре.

7.6. Отведите отвес 4 от плоской фигуры, двигая его вдоль оси на себя.

7.7. Снимите фигуру.

7.8. Подвешивая фигуру за каждое из двух остальных отверстий, произведите манипуляции по пунктам 7.4–7.7.

7.9. Точка пересечения трех линий и будет являться центром тяжести данной фигуры. Определите ее координаты $x_{C'_{\text{экс}}}$ и $y_{C'_{\text{экс}}}$.

7.10. Определите положение центра тяжести расчетным способом. Вычислите координаты $x_{C_{\text{рас}}}$ и $y_{C_{\text{рас}}}$.

7.11. Сравните результаты, полученные расчетным (аналитическим) и экспериментальным способами:

$$\delta_x = \frac{x_{C'_{\text{экс}}} - x_{C_{\text{рас}}}}{x_{C'_{\text{экс}}}} \cdot 100\%, \quad \delta_y = \frac{y_{C'_{\text{экс}}} - y_{C_{\text{рас}}}}{y_{C'_{\text{экс}}}} \cdot 100\%.$$

7.12. В отчете по лабораторной работе на эскизе фигуры отметьте точки с координатами $(x_{C'_{\text{экс}}}$ и $y_{C'_{\text{экс}}})$ и $(x_{C_{\text{рас}}}$ и $y_{C_{\text{рас}}})$.

8. Содержание и оформление отчета

8.1. Название лабораторной работы.

8.2. Цель лабораторной работы.

8.3. Схема установки.

8.4. Эскиз рассматриваемой фигуры с указанием размеров, а также расчеты координат центра тяжести и результаты эксперимента.

8.5. Вывод по лабораторной работе.

8.6. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Что называется центром тяжести тела?
2. В каких случаях центр тяжести располагается вне рассматриваемого тела? Приведите примеры.
3. Изменится ли положение центра тяжести тела от замены материала?
4. Приведите формулы для определения координат центра тяжести тела.
5. Приведите формулы для определения координат центра тяжести однородных тел.
6. Назовите методы определения положения центра тяжести тела.
7. Сформулируйте теорему о расположении центра тяжести симметричного тела.
8. Приведите формулы для определения положения центра тяжести простейших однородных тел и плоских фигур.
9. В чем заключается метод разбиения при нахождении центров тяжести тел?
10. Поясните способ отрицательных масс.
11. Как экспериментально определить положение центра тяжести неоднородного объекта сложной конфигурации (автомобиль, самолет и т.п.)?
12. Объяснить порядок работы с установкой М5.

1.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема: Проверка законов трения скольжения.

1. Цель лабораторной работы

Ознакомление с приближенными экспериментальными методами определения коэффициента трения скольжения; определение коэффициента трения покоя для различных материалов.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Освоение основных понятий и теоретических положений темы «Трение скольжения».

2.2. Приобретение навыков экспериментального определения коэффициента трения покоя для различных сочетаний соприкасающихся тел (пар трения).

3. Краткие теоретические сведения

Между движущимися телами в плоскости их соприкосновения возникает *сила трения скольжения*. Обусловлено это прежде всего шероховатостью соприкасающихся поверхностей и наличием сцепления у прижатых тел.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности называют *законами трения скольжения*. Их можно сформулировать следующим образом.

I. При стремлении сдвинуть одно тело относительно другого в плоскости их соприкосновения возникает *сила трения* \vec{F} , модуль которой может принимать любые значения от нуля до F_{\max} , т.е.

$$0 \leq F \leq F_{\max}$$

Сила трения приложена к телу и направлена в сторону, противоположную возможному его скольжению.

II. Максимальная сила трения равна произведению коэффициента трения f на силу нормального давления N :

$$F_{\max} = fN. \quad (3.1)$$

Коэффициент трения f – безразмерная величина, зависящая от материалов и состояния поверхностей соприкасающихся тел (шероховатости), а также от окружающей среды (температура, влажность, наличия смазки и т.п.). Определяют его опытным путем.

Различают коэффициенты трения покоя или сцепления – f и трения скольжения – $f_{\text{д}}$, причем последний, как правило, зависит и от скорости скольжения. Коэффициент трения покоя f соответствует такой максимальной силе трения F_{\max} , при которой еще сохраняется состояние равновесия, называемое предельным. Малейшее увеличение внешних сил может вызвать движение. Коэффициент трения покоя f , как правило, больше коэффициента трения скольжения $f_{\text{д}}$. С увеличением скорости скольжения значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{д}}$ сначала незначительно уменьшается, а затем остается практически неизменным.

Значения коэффициентов трения f для некоторых пар трения: дерево по дереву 0,4–0,7; металл по металлу 0,15–0,25; сталь по льду 0,027.

III. Максимальная сила трения в довольно широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

При отсутствии смазочных материалов силу трения скольжения называют силой сухого трения.

Реакция шероховатой поверхности. Угол трения

Как известно, реакция идеально гладкой поверхности направлена по нормали к ней. На шероховатой поверхности могут возникать силы трения. Поэтому реакцию шероховатой поверхности представим в виде двух составляющих: нормальной реакции \bar{N} (равной по модулю силе нормального давления) и перпендикулярной ей силы трения \bar{F} (рис. 2.1). Полная реакция $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}$ всегда отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол α . На рис. 2.1 видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{N}.$$

Если тело лежит на горизонтальной шероховатой поверхности и на него не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяжести, то $F = 0$, а полная реакция $\bar{R} = \bar{N}$. Приложив к телу силу \bar{F}_1 , мы стремимся вызвать его движение, но этого не происходит, так как возникает сила трения $\bar{F} = -\bar{F}_1$, причем $F \leq F_{\max}$.

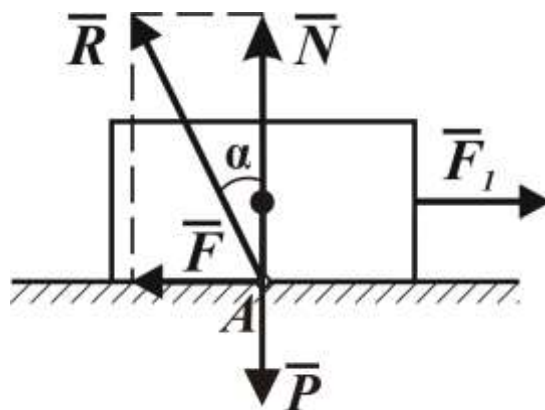


Рис. 3.1. Реакция шероховатой поверхности

С увеличением силы \bar{F}_1 будет возрастать и сила \bar{F} . Наконец, при $F_1 = F_{\max}$, наступит предельное состояние равновесия, при котором полная реакция \bar{R} отклонится от вертикали на угол α_{\max} , называемый *углом трения*. Обозначив его через φ , получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{\max}}{N}.$$

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения. Полная реакция шероховатой поверхности при равновесии имеет направление в пределах угла трения.

Равновесие тела на наклонной шероховатой плоскости

Равновесие тел с учетом сил трения скольжения рассматривают обычно для предельного состояния, когда сила трения достигает максимального значения. Реакция неидеальной связи представляется двумя составляющими: нормальной реакцией \bar{N} и максимальной силой трения \bar{F}_{\max} . В зависимости от поставленной задачи результат решения может быть выражен в виде равенства или в виде неравенства.

Сначала рассмотрим предельный случай равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости, когда $\bar{F} = \bar{F}_{\max}$ (рис. 3.2). Проецируя на ось Ox все силы, которые действуют на тело, получим

$$P \sin \alpha_{\max} = F_{\max} = f \cdot P \cos \alpha_{\max}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = f.$$

Но тело может находиться в покое на наклонной плоскости и при меньших углах ее наклона. Поэтому условие равновесия тела на наклонной плоскости выразим в виде неравенства:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Равенство $f = \operatorname{tg} \alpha_{\max}$ можно использовать для опытного определения коэффициента трения скольжения.

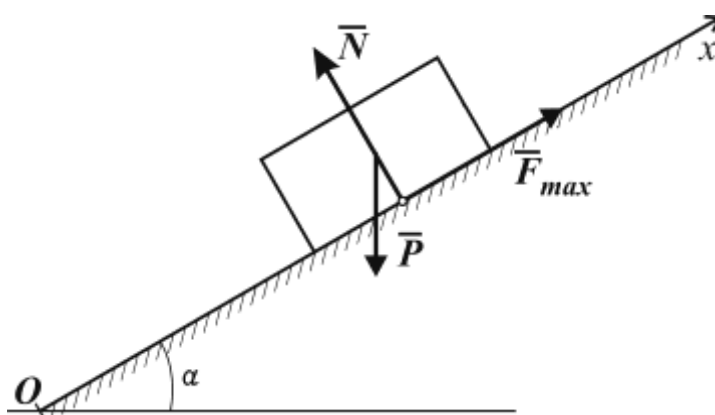


Рис. 3.2. Предельный случай равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости

Рассмотрим равновесие тела на наклонной шероховатой плоскости, когда кроме силы тяжести на тело действует внешняя сила \bar{F}_1 (рис. 3.3).

Здесь возможны два случая:

а) если $F_1 \leq P \sin \alpha$, то тело может начать скользить вниз, а сила трения F_{\max} будет препятствовать этому скольжению (см. рис. 3.3 2.3);

б) если $F_1 \geq P \sin \alpha$, то тело будет стремиться перемещаться по наклонной плоскости вверх, сила трения F_{\max} в этом случае будет направлена в противоположную сторону и будет это движение тормозить. Следовательно, чтобы тело не скользило вниз и не начало двигаться вверх, необходимо выполнить следующие условия:

$$F_1 > P \sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha$$

$$F_1 < P \sin \alpha + f \cdot P \cos \alpha.$$

Таким образом, условие равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости выражается двойным неравенством:

$$P(\sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha) < F_1 < P(\sin \alpha + f \cdot P \cos \alpha).$$

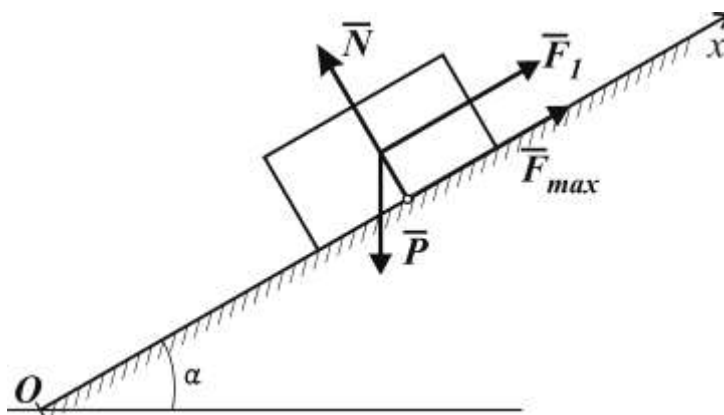


Рис. 3.3. Равновесие тела на наклонной шероховатой плоскости при действии внешней силы

4. Оборудование

- 4.1. Установка М9 для проверки законов трения.
- 4.2. Набор малых и больших пластин, набор грузов.

5. Описание установки и принцип работы

Внешний вид установки М9 приведен на рис. 5.1.

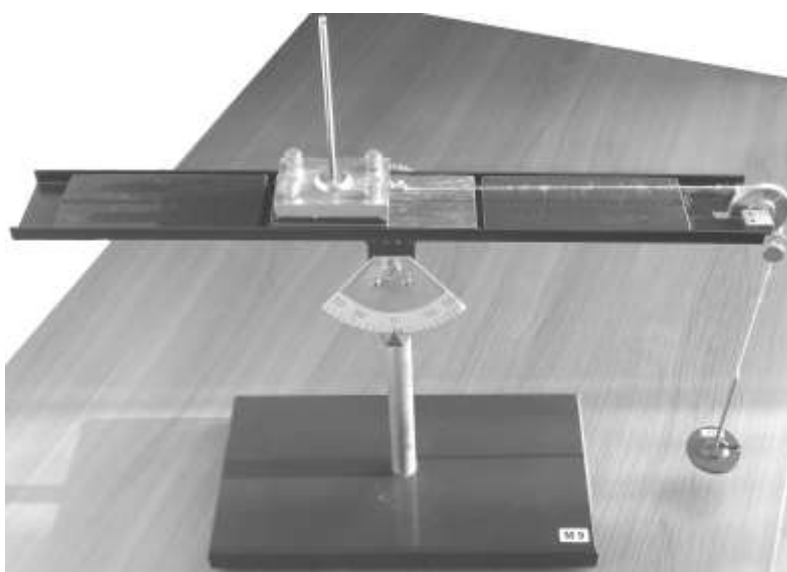


Рис. 5.1. Внешний вид установки М9 для проверки законов трения

Технические характеристики представлены в табл. 1.

Таблица 1

Технические характеристики

Габаритные размеры установки в горизонтальном положении платформы, мм, не более	длина	550	
	ширина	180	
	высота	460	
Масса установки (без грузов), кг, не более	15		
Пластина малая Материал: лист Д16 3,5 ГОСТ 21631–76 лист Л63 3,5 ГОСТ 15527–70 текстолит ПТ 3,5 ГОСТ 5–78 лента асбестовая тормозная ЛАТ–2 3,5×60 ГОСТ 1198–78 Габаритные размеры, мм, не более (справочные):	4 шт.		
		длина	70
		ширина	50
		высота	5
Пластина большая Материал: лист Д16 3,5 ГОСТ 21631–76 лист Л63 3,5 ГОСТ 15527–70 текстолит ПТ 3,5 ГОСТ 5–78 лента асбестовая тормозная ЛАТ–2 3,5×60 ГОСТ 1198–78 Габаритные размеры, мм, не более (справочные):	4 шт.		
		длина	130
		ширина	58
		высота	8
Масса платформы, г / вес платформы, Н	209 г.	2,05 Н	
Масса грузов, г / вес грузов, Н			
груз №1	500+10	5 Н	
груз №2	200+5	2 Н	
груз №3	100+2	1 Н	
груз №4	50+1,5	0,5 Н	
груз №5	25+1	0,25 Н	
Цена деления шкалы угла наклона направляющей, град	5 ± 0,5		
Пределы шкалы угла наклона направляющей, град	± 50		

Объектами испытаний являются соприкасающиеся тела, выполненные в виде пластин, закрепленные на наклонной плоскости, а также на платформе, которая может перемещаться по наклонной плоскости. Установка обеспечивает получение значения коэффициента трения в зависимости от материала трущихся поверхностей в пределах $0,1 \div 0,4$.

Схема установки М9 изображена на рис. 5.2.

Установка состоит из направляющей 1 с закрепленными на ней пластинами из различных материалов, стойки 2 с основанием 3, платформы 4 со сменными пластинами из различных материалов, шкалы 5 с ценой деления 5° и ручки-фиксатора 6, которая позволяет зафиксировать направляющую под определенным углом к горизонту. Платформа 4 может перемещаться по направляющей, установленной под определенным углом наклона, зависимым от материала пластин, а также веса платформы 4 и веса дополнительных гирь, присоединяемых к платформе через нить подвеса 7. Платформа может нагружаться грузами для создания нормального давления различной величины.

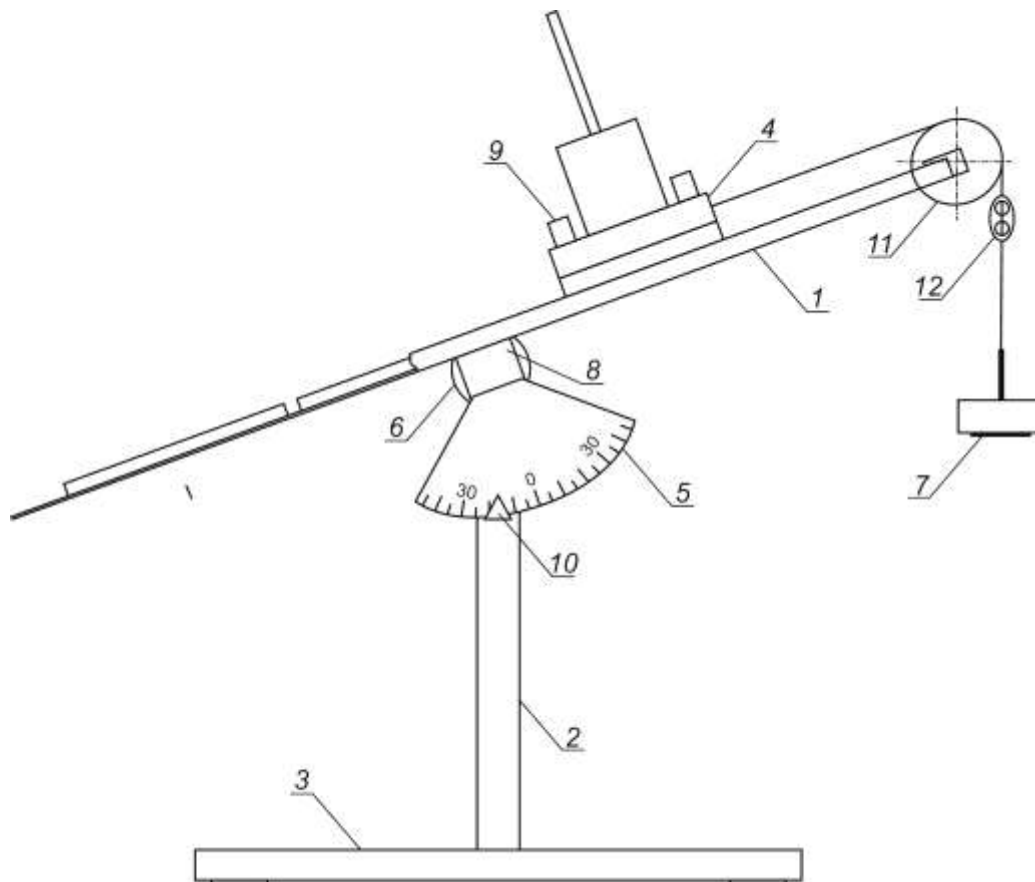


Рис. 5.2. Схема установки М9 для проверки законов трения

Движение платформы вверх по наклонной направляющей начнется, когда суммарный вес грузов P на подвесе 7 станет по величине большим или равным предельному (максимальному) значению силы трения.

6. Подготовка и порядок выполнения работы

6.1. Произведите внешний осмотр установки и убедитесь в надежности крепления направляющей 1 к стойке 2 и скобе 8, а также в надежности сборки всех элементов установки.

6.2. Поставьте установку на горизонтальную поверхность стола и установите направляющую так, чтобы нулевое значение шкалы 5 совпало с острым концом стрелки 10.

6.3. На основание платформы 4 установите малую пластину одного из исследуемых в работе материалов (сталь, алюминиевый сплав, текстолит, лента тормозная), закрепив ее винтами 9.

6.4. Закрепите на направляющей 1 большие пластины из материалов, исследуемых в лабораторной работе.

6.5. Установите платформу 4 на участок направляющей 1 с пластиной из исследуемого материала.

6.6. Перекиньте нить от платформы 4 к подвесу 7 для грузов через блок 11 и отрегулируйте фиксатором 12 длину нити.

6.7. Установите на платформу 4 требуемый груз (при необходимости увеличения ее веса).

6.8. Установите требуемый угол наклона направляющей 1.

6.9. Нагружайте подвес 7 грузами до тех пор, пока платформа не начнет перемещаться вверх по направляющей 1. Запишите значение веса грузов на подвесе 7, при котором это произошло.

6.10. Повторите опыт при другом сочетании трущихся поверхностей, другой нагрузке на платформу и другом угле наклона направляющей 1.

6.11. Вычислите для каждого опыта значение коэффициента трения покоя. Запишите результаты вычислений.

Приведенные ниже расчеты соответствуют схеме на рис. 6.1.

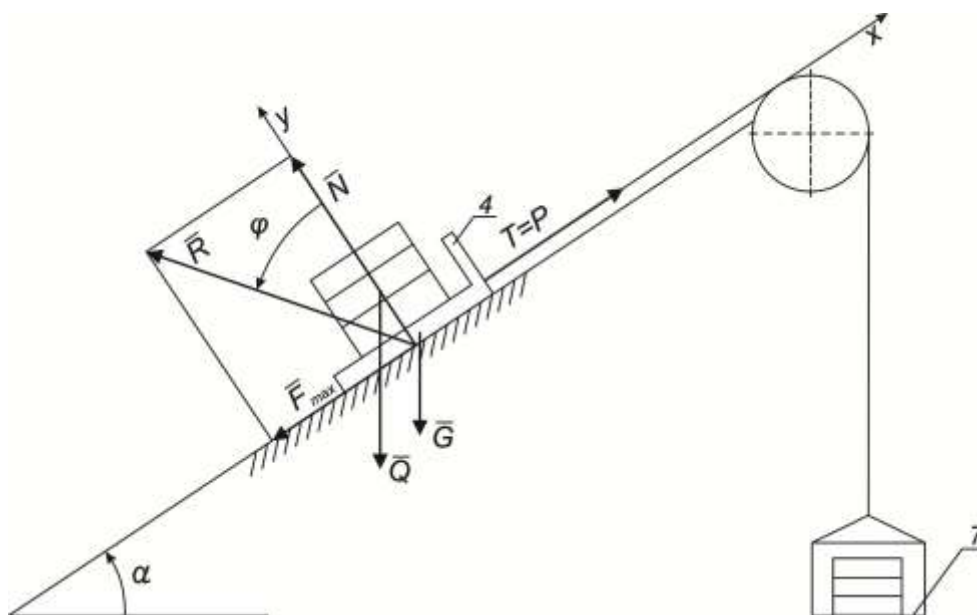


Рис. 6.1. Расчетная схема эксперимента

Из формулы (3.1)

$$f = \frac{F_{\max}}{N},$$

где $F_{\max} = P - (G + Q) \sin \alpha$, что следует из уравнения суммы проекций сил на ось Ox (рис. 6.1);

здесь P – суммарный вес грузов на подвесе 7;

G – вес платформы 4;

Q – суммарный вес грузов на платформе 4;

α – угол наклона направляющей;

$$N = (G + Q) \cos \alpha.$$

Таблица 2

Результаты лабораторной работы

Исходные данные					Результаты расчетов		
Вес платформы G , Н	Вес грузов на платформе Q , Н	Вес грузов подвеса P , Н	Угол наклона α , град	Пара трения П1/П2	$F = F_{\max}$, Н	N , Н	Коэффициент трения, f

Пару поверхностей трения обозначайте П1/П2, где П1 и П2 – материал поверхностей (С – сталь, А – алюминий, Т – текстолит, ЛТ – лента тормозная). Например: С/Т – сталь по текстолиту.

7. Содержание и оформление отчета

- 7.1. Название лабораторной работы.
- 7.2. Цель лабораторной работы.
- 7.3. Схема установки.
- 7.4. Результаты лабораторной работы по прилагаемой форме (табл. 2).
- 7.5. Вывод по лабораторной работе.
- 7.6. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Что такое трение?
2. Какие виды трения вам известны?
3. От каких факторов зависит сила трения?
4. Какие законы трения вам известны?
5. Что такое трение покоя?
6. Что такое трение скольжения?
7. От чего зависит коэффициент трения скольжения?
8. Как направлена полная реакция шероховатой поверхности?
9. Что такое угол трения?
10. Объясните понятие «конус трения».
11. Для чего используют конус трения?
12. В каком случае тело находится в равновесии на наклонной плоскости?

1.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Тема: Изучение произвольной плоской системы сил.

1. Цель лабораторной работы

Экспериментальное подтверждение теоремы о возможности приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Освоение основных понятий и теоретических положений статики.

2.2. Приобретение практических навыков работы с лабораторной установкой М8 для изучения произвольной плоской системы сил.

3. Краткие теоретические сведения

Основная теорема статики (теорема Пуансо): произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к какому-либо центру, заменив все действующие силы одной силой, равной *главному вектору* системы сил, приложенному в этом центре, и одной парой сил с моментом, равным *главному моменту* системы сил относительно того же центра.

Процесс замены системы сил одной силой и парой сил называется *приведением системы сил к заданному центру*. Точку, к которой приводят систему сил, называют *центром приведения* данной системы сил.

Главным вектором системы сил называют вектор \bar{R} , равный геометрической сумме этих сил:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (3.1)$$

Главным моментом системы сил относительно точки O называют вектор \bar{M}_O , равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этой точки:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_i). \quad (3.2)$$

Опытное доказательство данной теоремы проводится на примере плоской системы сил.

Система сил, приложенных к твердому телу, называется *плоской*, если их линии действия лежат в одной плоскости.

Согласно основной теореме статики любую плоскую систему сил можно в общем случае привести к силе и паре сил. Так как силы лежат в одной плоскости, то главный вектор \bar{R} также лежит в этой плоскости. Момент пары \bar{M}_O направлен перпендикулярно этой плоскости, так как сама пара расположена в плоскости действия рассматриваемых сил. Таким образом, для плоской системы сил главный вектор и главный момент всегда перпендикулярны друг другу.

Для плоской системы сил моменты сил относительно точки плоскости рассматривают как алгебраические величины (не векторы).

Таким образом, *моментом силы \bar{F} относительно некоторой точки O на плоскости называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки:*

$$m_O(\bar{F}) = \pm |\bar{F}| \cdot h,$$

где h – плечо силы.

Плечо силы – кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы (рис. 3.1).

Момент силы относительно точки считается положительным, если сила \bar{F} стремится повернуть тело вокруг точки O в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, и отрицательным, если в сторону вращения часовой стрелки.



Рис. 3.1. Плечо силы

Момент M_O , равный алгебраической сумме моментов данной системы сил относительно какой-либо точки в той же плоскости, называют *главным моментом системы сил относительно этой точки*:

$$M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\bar{F}_i). \quad (3.3)$$

Формулы для вычисления главного вектора и главного момента плоской системы сил

Для любой системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ главный вектор \bar{R} является векторной суммой этих сил (3.1), а главный момент \bar{M}_O – суммой векторов моментов сил относительно центра приведения (3.2).

Проецируя обе части векторных равенств (3.1) и (3.2) на координатные оси и принимая во внимание, что рассматривается плоская система сил, можно записать:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\bar{F}_i). \quad (3.4)$$

Модуль и направление главного вектора определяют по формулам:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R}. \quad (3.5)$$

Условия равновесия плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю:

$$\bar{R} = 0; \quad M_O = 0, \quad (3.6)$$

где O – любая точка плоскости.

Условия равновесия (3.6) можно выразить в виде системы трех уравнений:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_O(\bar{F}_i) = 0.$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух любым образом выбранных в плоскости действия

этой системы сил координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.

4. Оборудование

4.1. Установка М8 для изучения произвольной плоской системы сил.

4.2. Тарированные грузы.

5. Устройство и принцип работы установки

Внешний вид установки М8 приведен на рис. 5.1. Установка содержит модель материального тела (пластина), систему нагружения активными силами, систему уравнивания главного вектора и главного момента, отсчетные устройства.



Рис. 5.1. Внешний вид установки М8

Технические характеристики представлены в табл. 1.

Таблица 1

Технические характеристики установки М8

1	Количество шкал, штук: основных вспомогательных	4 4	
2	Цена деления шкал, мм: основных вспомогательных	5±0,5 1±0,2	
3	Диапазон измерения шкал, мм: основных вспомогательных	от -140 до +140 от -6 до +6	
4	Длина плеча двуплечих рычагов для создания главного момента, мм	20±0,1	
5	Расстояние от центра координат установки до осей вращения роликов, мм: внутренних кареток внешних кареток	143 212	
6	Максимально возможное смещение модели относительно нулевого положения в любом направлении под воздействием системы активных сил, мм	6	
7	Габаритные размеры установки без грузовых подвесов, мм, не более: длина ширина высота	440 440 230	
8	Масса установки без грузов, кг, не более	12	
9	Масса и количество гирь для создания активной системы сил, грамм/штук: гиря 5Н гиря 2Н гиря 1Н гиря 0,5Н гиря 0,25Н гиря 0,125Н	510±5 204±3 107±2 51±1 25,5±1 12,75±1	6 12 10 8 8 4

Схема установки М8 изображена на рис. 5.2. Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из основания 1, стойки 2 и верхней рамки, образованной четырьмя направляющими 3, закрепленными по углам несущими прутками 4 к стойке 2. На каждой

направляющей имеются две внешние и одна внутренняя каретки с роликами 5. Каретки могут двигаться вдоль направляющих и фиксироваться в заданном положении согласно основным шкалам 6.

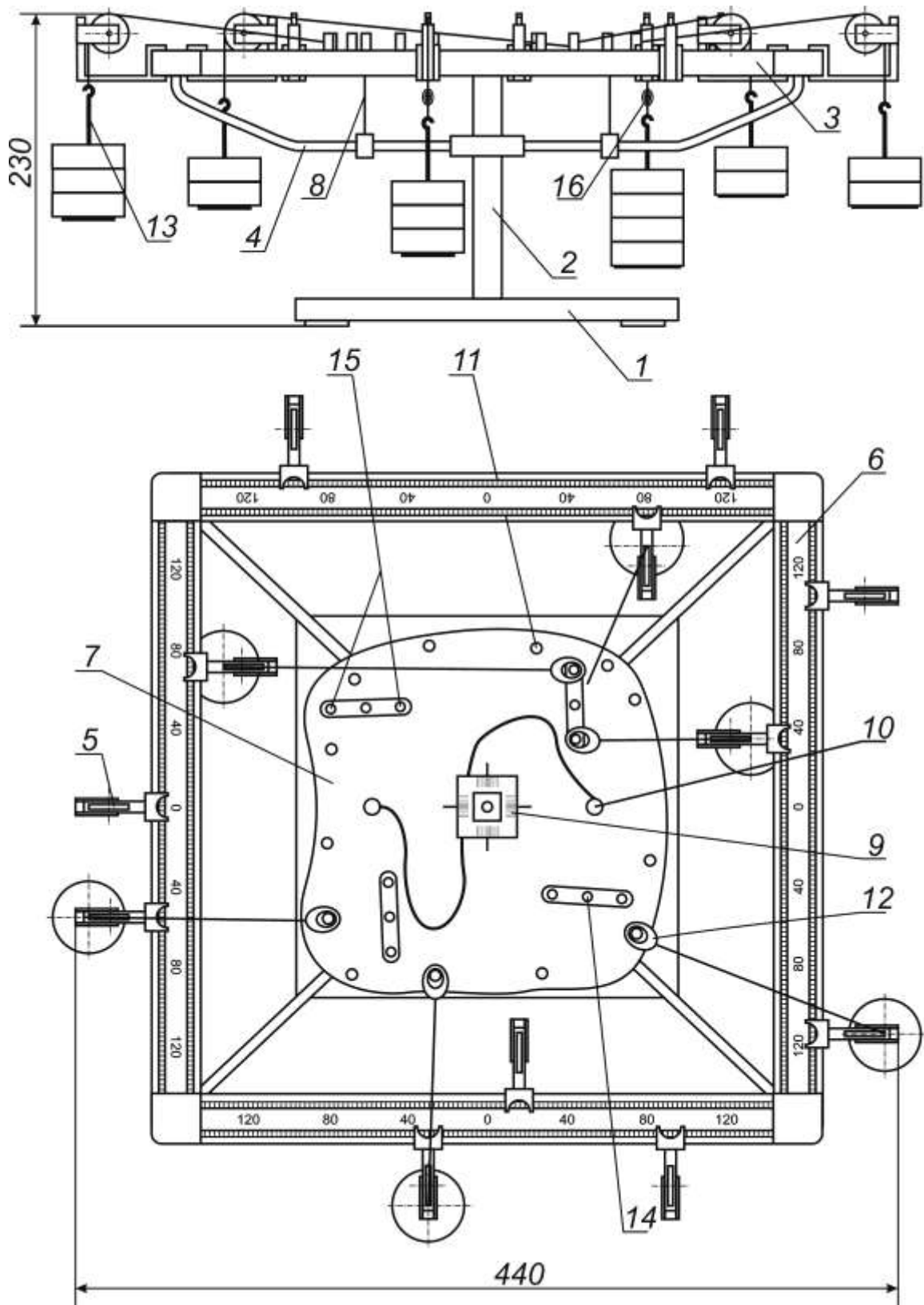


Рис. 5.2. Схема установки М8

К несущим пруткам 4 при помощи упругой подвески 8 прикреплена пластина постоянной толщины и произвольной формы 7, имитирующая материальное тело (далее – модель), которая может смещаться в горизонтальной плоскости. Для определения положения модели используется вспомогательная шкала 9. Для фиксации модели в «нулевом» положении имеются два фиксирующих штифта 10. По периметру модели установлены четырнадцать выступающих штифтов 11, на которые надеваются петли 12 на концах нитей подвесок 13 для создания системы активных (от 4 до 8) сил. Координаты точек приложения активных сил даны в табл. 2. В четырех точках модели установлены штифты 14 для приложения к модели главного вектора и равноплечие рычаги со своими штырями 15 для создания главного момента сил. Координаты этих точек даны в табл. 3. Для регулировки длины нитей служат фиксаторы длин 16.

Работа установки основана на возможности замены произвольной плоской системы сил одной силой (главным вектором) и одной парой сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно некоторого центра.

Все силы, участвующие в эксперименте должны быть кратными 0,125 Н, а общая сумма не превышать 70 Н.

Таблица 2

Координаты точек приложения активных сил

№ точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x, мм	90	85	70	30	-30	-75	-90	-85	-95	-70	-25	30	80	90
y, мм	20	60	80	90	90	75	30	20	-50	-90	-90	-90	-70	-30

Таблица 3

Координаты точек приведения

№ точек	x, мм	y, мм
1	50	50
2	-65	60
3	-50	-60
4	60	-50

6. Подготовка и порядок выполнения работы

6.1. Установить лабораторную установку на ровной горизонтальной поверхности стола.

6.2. Выбрать вариант нагружения модели активной системой сил и центр приведения системы сил.

6.3. Зафиксировать модель 7 (см. рис. 5.2) в «нулевом» положении специальными штифтами 10.

6.4. Определить теоретически направление и значение главного вектора и значение главного момента (см. формулы 3.3 и 3.4), равнозначных действию системы заданных активных сил с учетом направления и координат точек их приложения, а так же координат заданной точки приведения.

6.5. Уточнить, сколько и какие каретки должны участвовать в данном эксперименте.

6.6. Надеть металлическую петлю 12 на конце несъемной нити выбранной внешней каретки на штифт 14 модели, координаты которого совпадают с координатами точки приложения одной из активных сил.

6.7. На другой конец нити установить подвес 13 для грузов и перекинуть нить через ролик 5 выбранной каретки.

6.8. Выставить направление действия данной силы, двигая каретку вдоль направляющей, ориентируясь по направлению натянутой нити.

6.9. Отрегулировать длину нити так, чтобы расстояние от подвеса до стола было около 20 мм, используя для этого фиксатор длины нити б. (Наматывая или разматывая нить с фиксатора).

6.10. Установить на подвес груз, равный значению данной силы.

6.11. Повторить действия пп. 6.6–6.10 для других заданных активных сил.

6.12. Надеть металлическую петлю на конце съемной нити на штифт 14 модели с координатами, совпадающими с координатами заданной точки приведения.

6.13. Установить на другой конец нити подвес и отрегулировать длину нити с помощью фиксатора б.

6.14. Выставить направление нити от штифта к каретке обратное направлению главного вектора, двигая каретку вдоль направляющей.

6.15. Установить на подвес груз, равный значению главного вектора.

6.16. Надеть металлические петли на концах следующих двух съемных нитей на штифты 15 двуплечего рычага точки приведения и перекинуть нити через ролики двух противоположных внутренних кареток так, чтобы момент от сил был противоположным направлению вращения главного момента.

6.17. Установить на другие концы нитей по подвесу и отрегулировать их длину с помощью фиксатора б.

6.18. Установить на подвесы грузы так, чтобы момент создаваемый ими был равен значению главного момента.

6.19. Вынуть штифты 10, фиксирующие «нулевое» положение модели. При правильном теоретическом решении задачи и правильной установке системы активных сил и главного вектора и главного момента (равных по значению и обратных по действию) модель должна остаться в исходном «нулевом» положении (допускается сдвиг на 2–3 мм за счет неучтенных сил трения в роликах и веса подвесок).

7. Содержание и оформление отчета

7.1. Название лабораторной работы.

7.2. Цель лабораторной работы.

7.3. Вариант нагружения модели активной системой сил и центр приведения системы сил.

7.4. Результаты измерений и исследований, в том числе теоретические расчеты.

7.5. Вывод по лабораторной работе.

7.6. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента силы относительно точки.

2. В каких случаях момент силы относительно некоторой точки O равен нулю?

3. Изменяется ли момент силы относительно точки при переносе силы вдоль линии ее действия?

4. Что называется парой сил?
5. Чему равен момент пары сил?
6. Сформулируйте теорему о приведении системы сил к заданному центру.
7. Что называется главным вектором системы сил?
8. Что называется главным моментом системы сил относительно центра?
9. Зависят ли главный вектор и главный момент системы сил от выбора центра приведения?
10. Что называется плоской системой сил?
11. Сформулируйте условия равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Объяснить порядок работы с установкой М8.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 (КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ)

Тема: Изучение свободных прямолинейных колебаний материальной точки.

Введение. В инженерной деятельности специалиста (инженера) возникает необходимость решений вопросов, связанных с колебательными процессами. Теория колебаний относится к наиболее сложным вопросам теоретической механики. В связи с этим выполнение лабораторных работ по изучению свободных, затухающих и вынужденных прямолинейных колебаний материальной точки является важным фактором, способствующим пониманию и закреплению основных положений теории.

1. Цель и задачи выполнения работы

1.1. **Цель выполнения работы.** Освоение метода теоретической механики описания, теоретического и экспериментального исследования механического движения, изучение закономерностей колебательного движения точек.

1.2. **Задачи выполнения работы:** 1) понять и усвоить алгоритм теоретического описания и исследования механического движения точки; 2) повторить математический аппарат от математической постановки задачи до получения и анализа уравнения движения; 3) теоретически и экспериментально установить влияние массы точки и жесткости пружины на характеристики ее колебательного движения; 4) понять и освоить логику расчета эквивалентной жесткости систем пружин; 5) найти развернутые ответы на контрольные вопросы.

2. Краткая теория свободных колебаний материальной точки

В данном разделе содержатся основные понятия и теоретические зависимости между их количественными мерами по теме «Колебания материальной точки». Для более глубокого изучения темы необходимо воспользоваться материалами, изложенными в лекционном курсе, в учебниках и учебных пособиях по теоретической механике. Рекомендуемая литература приведена в конце данной лабораторной работы.

Моделью колеблющегося тела является материальная точка. Исследование механического движения начинается с разработки механической модели движения (расчетной схемы). Необходимое для возникновения механических колебаний (периодического движения в ограниченной области пространства) условие устойчивого равновесия точки моделируется установкой тела 1 массой M на гладкую плоскую поверхность 2 и присоединения его посредством цилиндрической пружины 3 к стене 4 (рис. 2.1). Силы сопротивления здесь не учитываются. Точка O – положение устойчивого равновесия, около которого происходит колебательное движение.

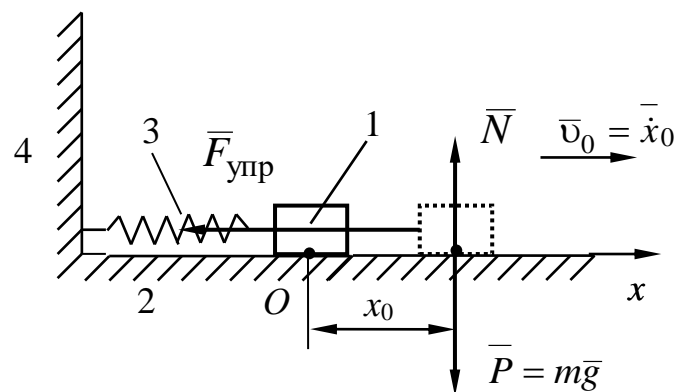


Рис. 2.1. Механическая модель свободных прямолинейных колебаний материальной точки

Математическая постановка задачи осуществляется на основе механической модели и включает дифференциальное уравнение движения:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.1)$$

и начальные условия:

$$\text{при } t = t_0 = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (2.2)$$

Масса считается известной. Точка может двигаться только по оси x .

Далее необходимо поработать с уравнениями (2.1) и (2.2) в основном тождественными математическими преобразованиями, чтобы получить удобную для интегрирования скалярную форму уравнения (2.1), которая получается его проецированием на ось x и имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.3)$$

где m – масса точки; \ddot{x} – проекция ускорения точки на ось Ox , $\sum_{i=1}^n X_i$ –

сумма проекций на ось Ox всех сил, действующих на точку.

Свободные колебания происходят при наличии только восстанавливающей силы, проекция которой на ось $F_x = -c \cdot x$, где c – жесткость пружины. Подставляя это уравнение в (2.3) и деля его на массу точки, получаем каноническую форму дифференциального уравнения свободных колебаний точки в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (2.4)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – круговая частота собственных колебаний точки.

Время одного полного колебания называется периодом колебаний и равно

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (2.5)$$

Решением дифференциального уравнения (2.4) является уравнение движения точки, имеющее вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.6)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; t – время.

Для определения постоянных интегрирования и нахождения, тем самым, частного решения дифференциального уравнения (2.4) используются начальные условия (2.2). Для нахождения двух постоянных C_1 и C_2 второе уравнение получают дифференцированием (2.6) по времени

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (2.7)$$

Решая совместно систему (2.6) и (2.7), находим

$$C_1 = x_0 \text{ и } C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}. \quad (2.8)$$

Уравнения движения примут вид:

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt, \quad (2.9)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sin kt + \dot{x}_0 \cos kt, \quad (2.10)$$

Уравнения движения точки (2.9) и (2.10) являются вершиной метода теоретической механики, потому что они позволяют решить две основные задачи описания механического движения: иметь способ определения местонахождения точки на траектории (координата x) в любой момент времени t и скорости ее движения (\dot{x}) в любой момент времени.

Для получения уравнения движения в амплитудной форме произведем замену произвольных постоянных C_1 и C_2 на новые постоянные A и α по уравнениям:

$$C_1 = A \sin \alpha \text{ и } C_2 = A \cos \alpha. \quad (2.10)$$

Подстановка (2.8) в (2.10) и в (2.6) и применение известного тригонометрического соотношения дает уравнение движения точки

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha), \quad (2.11)$$

где A – амплитуда колебаний; α – начальная фаза колебаний.

Продифференцировав по времени (2.11), получим второе уравнение для определения A и α

$$\dot{x}(t) = A \cos(kt + \alpha). \quad (2.12)$$

Совместное решение (2.11) и (2.12) дает

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = kx_0 / \dot{x}_0. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11) и (2.12) являются другой формой представления уравнений (2.9) и (2.10), т.е. они эквивалентны. Эти уравнения позволяют теоретически изучить все закономерности

рассматриваемого механического движения точки. Например, по уравнениям движения можно исследовать влияние на характеристики движения начальных условий, массы точки, жесткости упругого элемента и т.д.

Представляет интерес теоретически изучить влияние постоянной силы на характер колебаний. Для этого удобно построить механическую модель с вертикальным расположением пружины (рис. 2.2).

В положении статического равновесия (рис. 2.2, б) груз P_1 растягивает пружину на $\delta_{ст1}$ и сила тяжести \bar{P}_1 уравновешивается силой упругости пружины \bar{F} . Это состояние описывается уравнением равновесия

$$m_1 g - c \delta_{ст1} = 0. \quad (2.14)$$

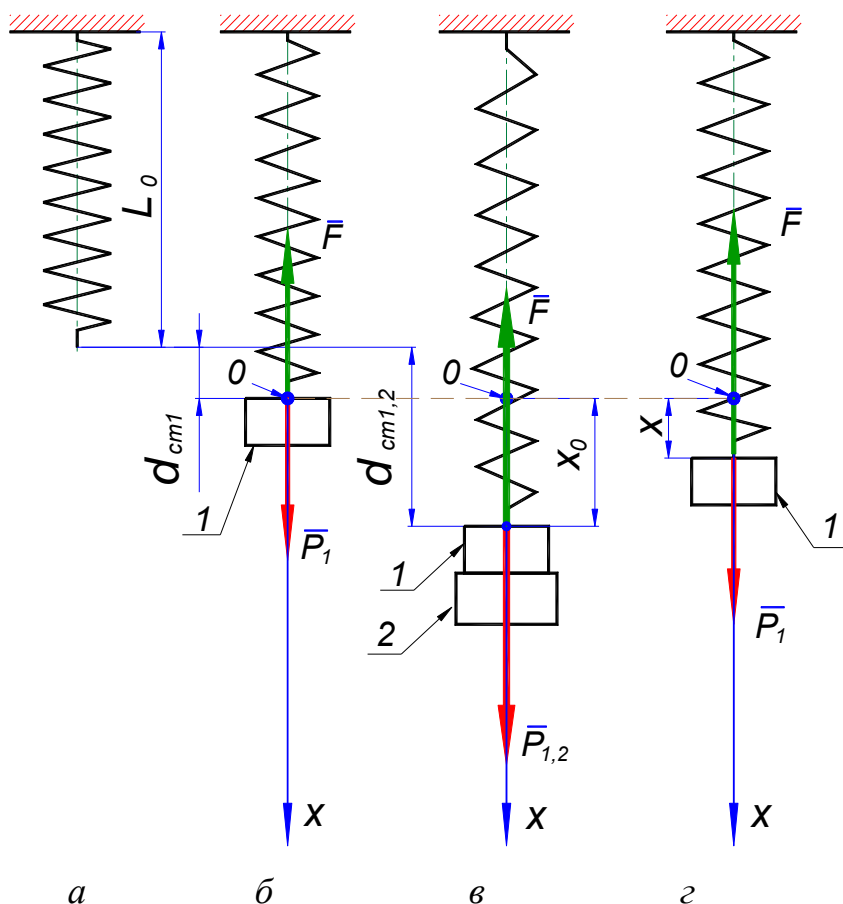


Рис. 2.2

Если к грузу P_1 добавить еще один груз P_2 , то состояние статического равновесия этих грузов на пружине (см. рис. 2.2, в) будет описываться уравнением

$$(m_1 - m_2)g - c\delta c_{ст1,2} = 0, \quad (2.15)$$

где $\delta_{ст1,2} = \delta_{ст1} + \delta_{ст2}$, т.е. статическая деформация пружины от двух грузов складывается из ее статических деформаций от каждого из грузов в отдельности. Итак, два груза P_1 и P_2 растягивают пружину и покоятся. Если теперь аккуратно удалить груз P_2 , не сообщая оставшемуся грузу P_1 никакой скорости, то груз P_1 на пружине начнет совершать движение (см. рис. 2.2, з). Выбрав систему координат – вертикальную ось Ox , с началом, совпадающим с положением статического равновесия груза, это движение можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$m_1 \ddot{x} = \Sigma X_i = m_1 g - c(\delta_{см1} + x). \quad (2.16)$$

Используя (2.13) уравнение (2.15) приводится к виду (2.4). Получается, что наличие постоянной силы не оказывает влияния на характер колебания.

В рассмотренном примере груз P_2 был необходим для задания начального положения грузу P_1 . Начальные условия выглядят так:

$$t = 0; \quad x_0 = \delta_{ст2}; \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Подстановка этих значений в (2.6) дает: $A = \delta_{см2}$; $\alpha = \pi/2$ и уравнение колебаний имеет вид

$$x = \delta_{см2} \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) = \delta_{см2} \cos(kt). \quad (2.17)$$

Параллельное соединение пружин.

Рассмотрим параллельное соединение двух пружин с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 2.3). Схема соединения пружин на рис. 2.3, а характерна тем, что на ней при движении груза обе пружины одновременно растягиваются, или одновременно сжимаются, в отличие от соединения, показанного на рис. 2.3, б, где при растяжении одной из пружин вторая сжимается, и наоборот.

Деформации же пружин на обеих схемах одинаковы: $\delta_{ст1} = \delta_{ст2} = \delta$. Для соединения по схеме (рис. 2.3, а) это означает, что штанга АВ должна смещаться по вертикали, сохраняя горизонтальность. Для

обеспечения этого условия груз P необходимо подвесить в точке D , в которой приложена равнодействующая двух параллельных сил упругости:

$$F_1 = c_1 \delta \quad \text{и} \quad F_2 = c_2 \delta. \quad (2.18)$$

Эта точка определяется соотношением:

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b, \quad \text{или} \quad c_1 \delta \cdot a = c_2 \delta \cdot b, \quad (2.19)$$

и окончательно

$$c_1 \cdot a = c_2 \cdot b. \quad (2.20)$$

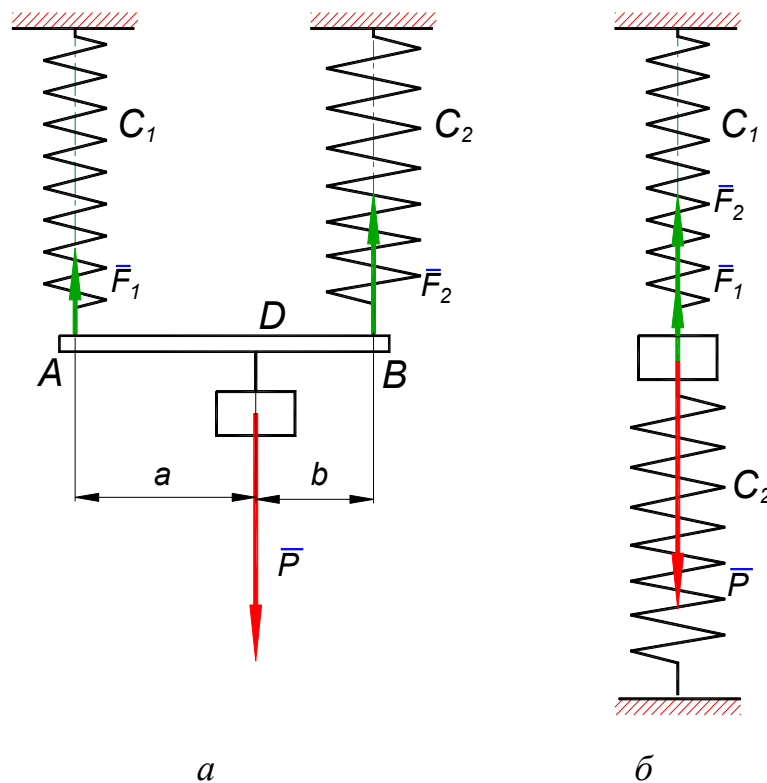


Рис. 2.3

Замечание: При выполнении лабораторной работы точка D подбирается экспериментально путем смещения груза по штанге AB и добиваясь ее горизонтальности.

Уравнения равновесия для обеих рассматриваемых схем выглядят одинаково:

$$P = (c_1 + c_2) \cdot \delta = c_{\text{ЭКВ}} \cdot \delta, \quad (2.21)$$

откуда жесткость эквивалентной пружины, заменяющей две параллельно соединенные, находится как

$$c_{\text{ЭКВ}} = c_1 + c_2. \quad (2.22)$$

Последовательное соединение пружин.

На рис. 2.4 показан груз P , подвешенный к двум последовательно соединенным пружинам. В положении статического равновесия каждая из пружин растягивается силой P . Статические удлинения пружин будут

$$\delta_{\text{ст}1} = \frac{P}{c_1}, \quad \delta_{\text{ст}2} = \frac{P}{c_2}. \quad (2.23)$$

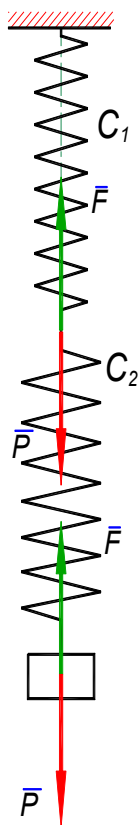


Рис. 2.4

Если представить пружину с коэффициентом жесткости $c_{\text{ЭКВ}}$, эквивалентную двум данным пружинам, то в положении статического равновесия ее удлинение равно

$$\delta = \frac{P}{c_{\text{ЭКВ}}}, \quad (2.24)$$

но учитывая, что

$$\delta = \delta_{\text{ст}1} + \delta_{\text{ст}2}, \quad (2.25)$$

с использованием (2.23) и (2.24) получаем для последовательно соединенных пружин

$$c_{\text{экв}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}. \quad (2.26)$$

3. Оборудование

3.1. Активные клавиши

При выполнении лабораторной работы применяются следующие клавиши клавиатуры (рис. 3.1):

- *W, S, A, D* – для перемещения в пространстве;
- *F2, E* – аналог средней кнопки манипулятора (при первом нажатии берется объект, при последующем – ставится);
- *F10* – выход из программы.



Рис. 3.1

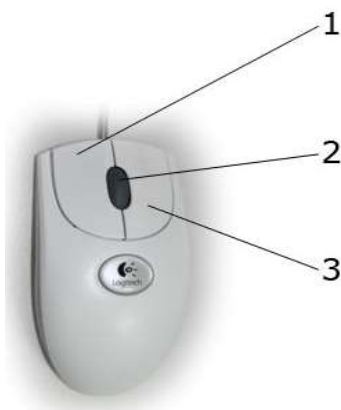


Рис. 3.2

При работе с манипулятором (мышью) используются следующие клавиши (рис. 3.2):

- левая клавиша мыши (1) – при нажатии и удерживании обрабатывается (поворачивается, переключается) тот или иной объект;
- средняя клавиша (2) при первом нажатии (прокрутка не используется) берется объект, при последующем – ставится;

– Правая клавиша (3) – при нажатии появляется курсор-указатель, при повторном – исчезает.

Примечание: при появившемся курсоре невозможно переводить взгляд вверх и в стороны.

3.2 Лабораторное оборудование

Комплектность лабораторной установки (рис. 3.3):

- шесть пружин разной длины, с разными коэффициентами жесткости;
- штанга для параллельного соединения пружин;
- комплект грузов;
- секундомер;
- линейка.



Рис. 3.3

4. Порядок выполнения работы

4.1. Определение коэффициента жесткости пружины

1. Закрепите исследуемую пружину.
2. Подвесьте к ней один из грузов P_0 и запишите в таблицу длину предварительно напряженной пружины L_0 .
3. Добавляя последовательно любой из n имеющихся грузов P_i , фиксируем соответствующие длины L_i пружины и вычисляем величины статических деформаций (удлинений):

$$\delta_{ст_i} = L_i - L_{i-1}. \quad (4.1)$$

4. Вычислите коэффициент жесткости пружины для каждого из случаев догрузки:

$$c_i = \frac{P_i}{\delta_{ст_i}}. \quad (4.2)$$

5. Вычислите среднеарифметическое значение коэффициента жесткости пружины

$$c = \frac{\sum c_i}{n}. \quad (4.3)$$

6. Вычислите погрешность измерения коэффициента жесткости

$$\Delta_{c_i} = \frac{|c - c_i|}{c} \cdot 100\%. \quad (4.4)$$

7. Занесите все результаты измерений и вычислений в таблицу 1 и повторите все для второй пружины. Коэффициенты жесткости обозначать c_m и c_b соответственно для пружины малого и большого диаметров.

4.2. Определение коэффициента жесткости пружин, эквивалентных параллельному и последовательному соединению пружин

Параллельное соединение.

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной параллельному соединению двух пружин:

$$c_{\text{пар}}^m = c_M + c_6, \quad (4.5)$$

где c_M и c_6 коэффициенты жесткости пружин меньшего и большего диаметров, взятые из табл. 1.

2. Соедините пружины параллельно (рис. 4.1), и проделайте все, что было выполнено для одной пружины в соответствии с п. 4.1, заполняя табл. 2. В результате будет получено среднеарифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{Посл}}$ данной системы параллельно соединенных пружин.

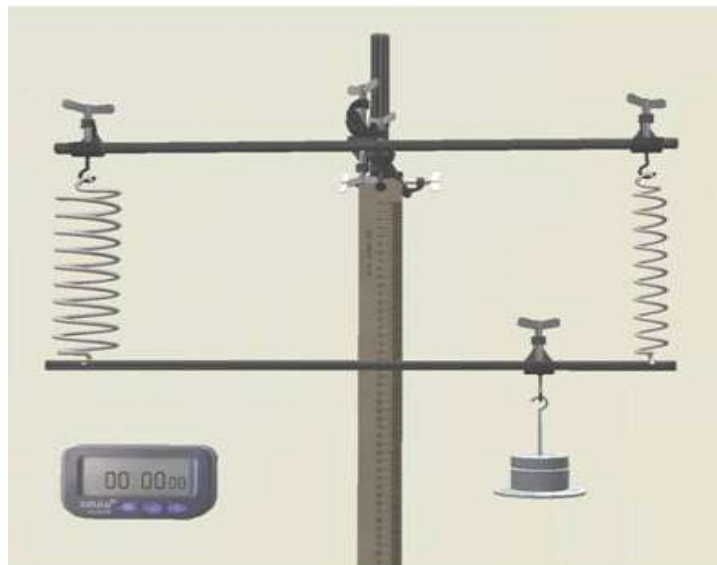


Рис. 4.1

3. Сравните значения $c_{\text{пар}}^m$ и $c_{\text{пар}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{пар}}} = \frac{|c_{\text{пар}}^m - c_{\text{пар}}|}{c_{\text{пар}}^m}. \quad (4.6)$$

Последовательное соединение.

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной последовательному соединению двух пружин:

$$c_{\text{Посл}}^m = \frac{c_M \cdot c_6}{c_M + c_6}. \quad (4.7)$$

2. Соедините пружины параллельно (рис. 4.2), и сделайте все, что было выполнено для одной пружины в соответствии с п. 4.1, занося все результаты в соответствующую часть табл. 2. В результате будет получено среднеарифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{посл}}$ данной системы параллельно соединенных пружин.

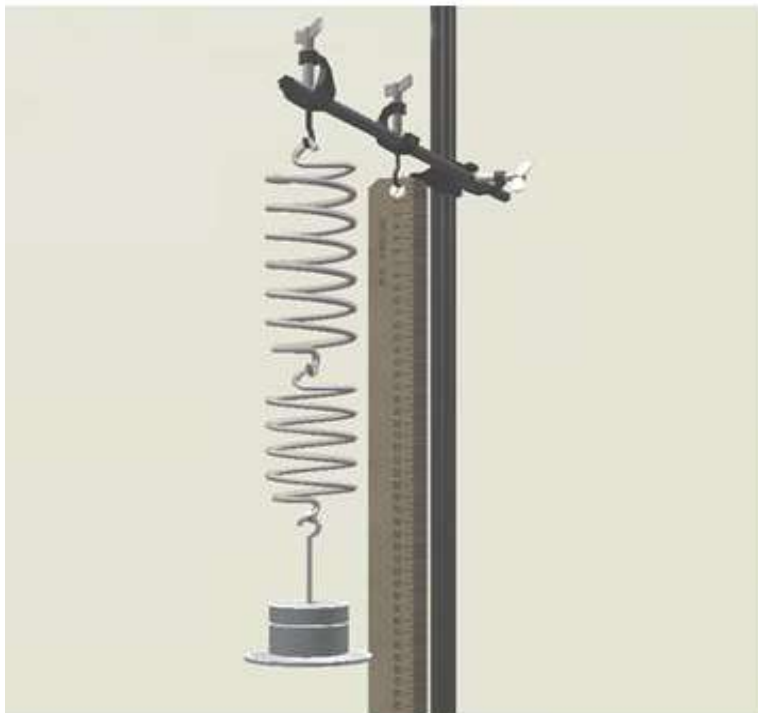


Рис. 4.2

3. Сравните значения $c_{\text{посл}}^m$ и $c_{\text{посл}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{посл}}} = \frac{|c_{\text{посл}}^m - c_{\text{посл}}|}{c_{\text{посл}}^m}. \quad (4.8)$$

4.3. Определение периода колебаний груза

1. Предскажите теоретически по формуле (2.5) какими будут периоды колебаний грузов на пружинах большего и меньшего диаметров, а также при параллельном и последовательном соединении этих пружин. При этом массы и коэффициенты жесткости брать из табл. 1 и 2.

2. Подвесив исследуемую пружину (или соединение) к раме, загрузите ее грузами в соответствии с таблицами.

3. В каждом из случаев загрузки, отклоняя груз от положения равновесия, измерьте при помощи секундомера время 10 полных колебаний.

4. После подсчета времени одного колебания $T_{\text{эксп}}$ вычислите погрешность по отношению к теоретически предсказанному $T_{\text{теор}}$.

$$\Delta_T = \frac{|T_{\text{эксп}} - T_{\text{теор}}|}{T_{\text{теор}}}. \quad (4.9)$$

Результаты занесите в табл. 3.

5. Контрольные вопросы

1. Основной отличительный признак свободных колебаний.
2. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?
3. Что значит описать механическое движение точки?
4. Алгоритм описания механического движения точки.
5. Что такое уравнение или закон движения материальной точки?
6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний?
7. От каких факторов зависят частота и период свободных колебаний?
8. От каких факторов зависят амплитуда и начальная фаза свободных колебаний?
9. Почему точность определения периода будет выше, если следить за прохождением груза его равновесного положения, а не крайнего?
10. Как вычисляется среднее арифметическое значение измеряемой величины?
11. Как подсчитать погрешность измерения?
12. Как связаны между собой период и круговая частота?
13. Как выглядит график свободных колебаний?
14. Что такое статическая деформация пружины?
15. Как влияет наличие постоянной силы на свободные колебания?

16. Как влияет увеличение силы тяжести на свободные колебания?

17. Как можно увеличить амплитуду свободных колебаний?

18. Как изменяется период колебаний с изменением коэффициента жесткости пружины?

19. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных параллельно?

20. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных последовательно?

6. Отчет

1. Изобразите схему установки с указанием координатной оси и начала на этой оси.

2. Покажите силы, действующие на груз, деформацию пружины в положении статического равновесия груза, координату x груза в произвольный момент колебаний.

3. Заполнить табл. 1–3.

4. Построить графики деформирования двух пружин по данным табл. 1.

Таблица 1

Определение коэффициентов жесткости пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Средние значения жесткости
Пружина малого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{м_i}$					
Погрешность измерения жесткости Δc_i					
Пружина большого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{б_i}$					
Погрешность измерения жесткости Δc_i					

Таблица 2

Определение коэффициентов жесткости систем пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Средние значения жесткости
Система двух параллельно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст\ i}$					
Жесткость $c_{пар\ i}$					
Расчетная жесткость $c_{пар}^m$ (по c_m и c_b из табл. 1)					
Погрешность $\Delta_{c\ пар}$					
Система двух последовательно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст\ i}$					
Жесткость $c_{посл\ i}$					
Расчетная жесткость $c_{посл}^m$ (по c_m и c_b из табл. 1)					
Погрешность $\Delta_{c\ посл}$					

Определение периода колебаний грузов

	Коэффициент жесткости C , Н/м	Масса грузов m , кг	Теоретическое значение периода T , с	Экспериментальное значение 10 периодов t , с	Экспериментальное значение периода T , с	Относительная погрешность
Пружина малого диаметра						
Пружина большого диаметра						
Параллельно соединенные пружины						
Последовательно соединенные пружины						

2.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 (КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ)

Тема: Изучение прямолинейных затухающих колебаний материальной точки.

Введение. В предыдущей лабораторной работе мы убедились в том, что введение в колебательную систему постоянной силы не оказывает влияния на закономерности колебаний. Дополнительная постоянная сила только смещает положение устойчивого равновесия. В этой работе мы изменим характер дополнительной силы. Введем в систему диссипативную силу, то есть силу, работа которой превращается в тепловую энергию. К силам этого типа относятся, например, силы трения, силы пневмо-гидродинамические, которые оказывают сопротивление движению.

1. Цель и задачи проведения лабораторной работы

1.1. **Цель выполнения** работы: изучение влияния диссипативных сил (сил сопротивления) на закономерности прямолинейных колебаний точки.

1.2. **Задачи выполнения работы:** 1) изучить влияние диссипативной силы (силы сопротивления) на математическую постановку задачи; 2) научиться теоретически и экспериментально определять параметры колеблющейся точки: частоту, период, коэффициент затухания, декремент затухающих колебаний; 3) усвоить основной метод борьбы с колебаниями и количественные характеристики быстроты затухания колебаний.

2. Краткая теория затухающих колебаний материальной точки

2.1. Математическая постановка задачи

Наблюдения показывают, что свободные колебания материальной точки (или тела, принимаемого за материальную точку) около положения устойчивого равновесия, происходящие под действием восстанавливающей силы, не продолжаются бесконечно долго. Постепенно амплитуда колебаний уменьшается, колебания

затухают. Таким образом, теория свободных колебаний требует уточнения, в котором необходимо учитывать фактор, приводящий к их затуханию. Этим фактором является сила сопротивления движению, т.е. сила, направленная противоположно движению.

К числу сил сопротивления следует отнести, например, силы связанные с вязкостью жидкости или воздуха, внутреннее трение в материале колеблющегося тела, трение между поверхностями скольжения. При рассмотрении колебаний материальной точки в жидкости или воздухе, как показывают опыты, сила сопротивления этой среды является функцией скорости. При небольших скоростях движения (меньших 0,2 м/с в жидких средах и меньших 20 м/с в воздухе) и относительно небольших размерах колеблющегося тела вязкая составляющая силы сопротивления значительно преобладает над аэродинамической (или гидродинамической) составляющей. В этом случае сила сопротивления является линейной функцией скорости.

Следует заметить, что даже если колебания происходят в пустоте, то они будут постепенно затухать вследствие внутреннего трения в материале упругого элемента колеблющейся системы. Сила сопротивления от внутреннего трения в первом приближении также считается пропорциональной первой степени скорости.

Таким образом, в теории затухающих колебаний сила сопротивления задается формулой

$$\bar{R} = -\mu\bar{V}, \quad (2.1)$$

здесь \bar{R} – сила сопротивления; μ – коэффициент сопротивления, зависящий от свойств окружающей среды и свойств материала, он определяется опытным путем; \bar{V} – скорость; знак $-$ в формуле означает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную скорости.

В лабораторной работе с целью уменьшения влияния гидродинамического сопротивления, когда $R=R(V^2)$, в качестве колеблющегося тела берется подвешенная на пружине тонкая пластинка с малой площадью поперечного сечения.

На рис. 2.1, а показана пружина длиной L_0 в свободном состоянии.

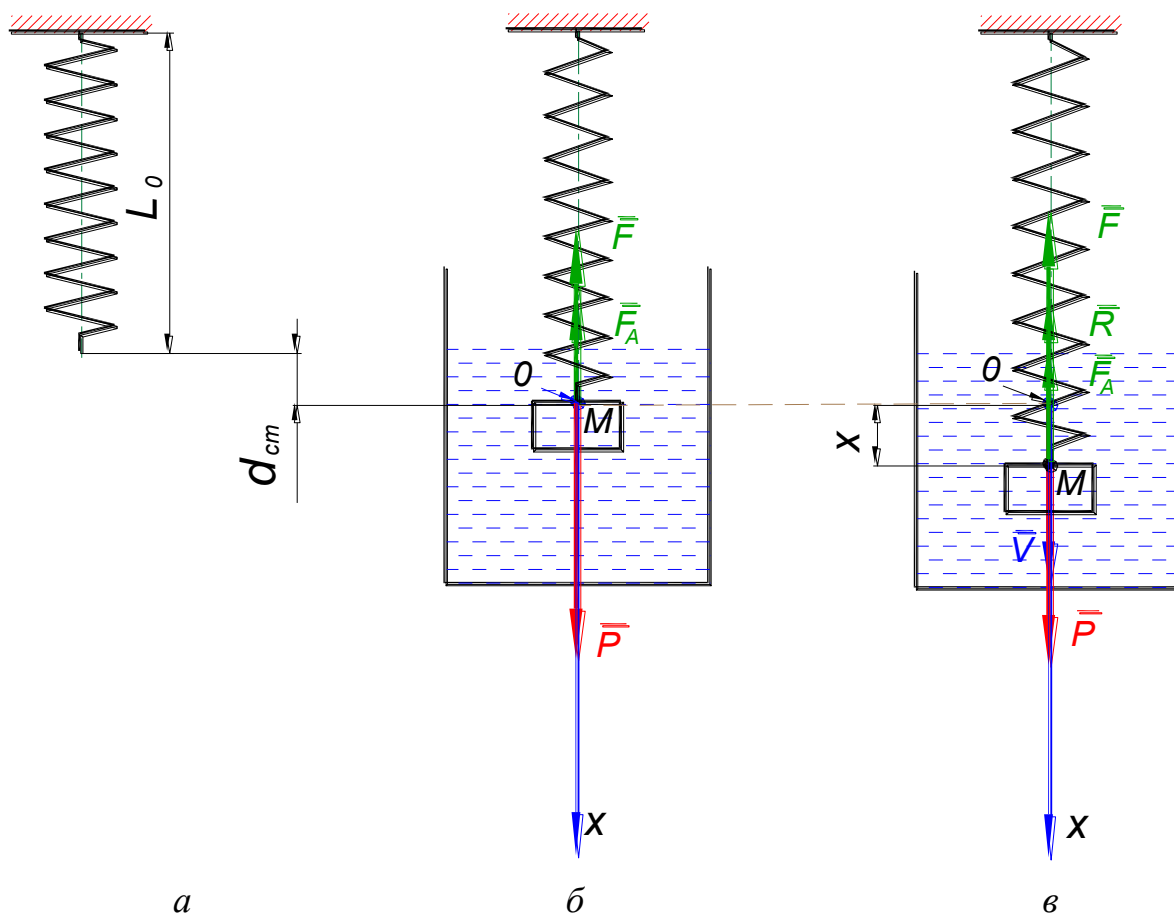


Рис. 2.1

На рис. 2.1, б показано состояние статического равновесия пластины массой m (рассматривается как точка M), подвешенную к пружине и погруженную в сосуд с жидкостью. Это состояние описывается уравнением равновесия

$$P = F_A + c\delta_{\text{ст}}, \quad (2.2)$$

здесь $P = mg$ – сила тяжести; F_A – архимедова сила выталкивания; $F_A = c\delta_{\text{ст}}$ – сила упругости пружины, имеющая жесткость c и растянутая в этом положении на $\delta_{\text{ст}}$. Точка O – положение устойчивого равновесия пластины около которого и происходят колебания.

Произвольное положение пластины в процессе колебательного движения (расчетная схема процесса – механическая модель) изображена на рис. 2.1, в. Дифференциальное уравнение движения берем в форме второго закона Ньютона

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (2.3)$$

Скалярную форму дифференциального уравнения (2.3) получаем проецированием его на ось x

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (2.4)$$

где \ddot{x} – проекция ускорения точки на ось Ox ; $\sum_{i=1}^n F_i$ – сумма проекций на ось Ox всех сил, действующих на точку.

Формулируем начальные условия задачи: при $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ и (2.3) приводится к виду

$$m\ddot{x} = P - F_A - c(x + \delta_{ст}) = 0. \quad (2.5)$$

С привлечением уравнения (2.2) после простых преобразований получаем каноническое дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2.6)$$

где обозначено $2n = \frac{\mu}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, n – коэффициент затухания, k – круговая частота свободных колебаний.

3. Исследование затухающих колебаний

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (2.6) ищется путем составления соответствующего характеристического уравнения и анализа его корней. В результате выясняем, что надо рассмотреть три варианта решения:

а) случай большого сопротивления, когда $n > k$ и решение уравнения (2.5) имеет вид:

$$x = C_1 e^{t\sqrt{n^2 - k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{n^2 - k^2}}; \quad (3.1)$$

б) предельный случай, когда $n = k$ и решение уравнения (2.5) ищется в виде:

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) и (3.2) C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий

На рис. 3.1 приведены кривые, иллюстрирующие движения в соответствии с формулами (3.1)–(3.2). Движение в этих случаях апериодическое, то есть не является колебательным. Вид кривых зависит от начальных условий, но в любом случае система асимптотически стремится вернуться к положению статического равновесия.

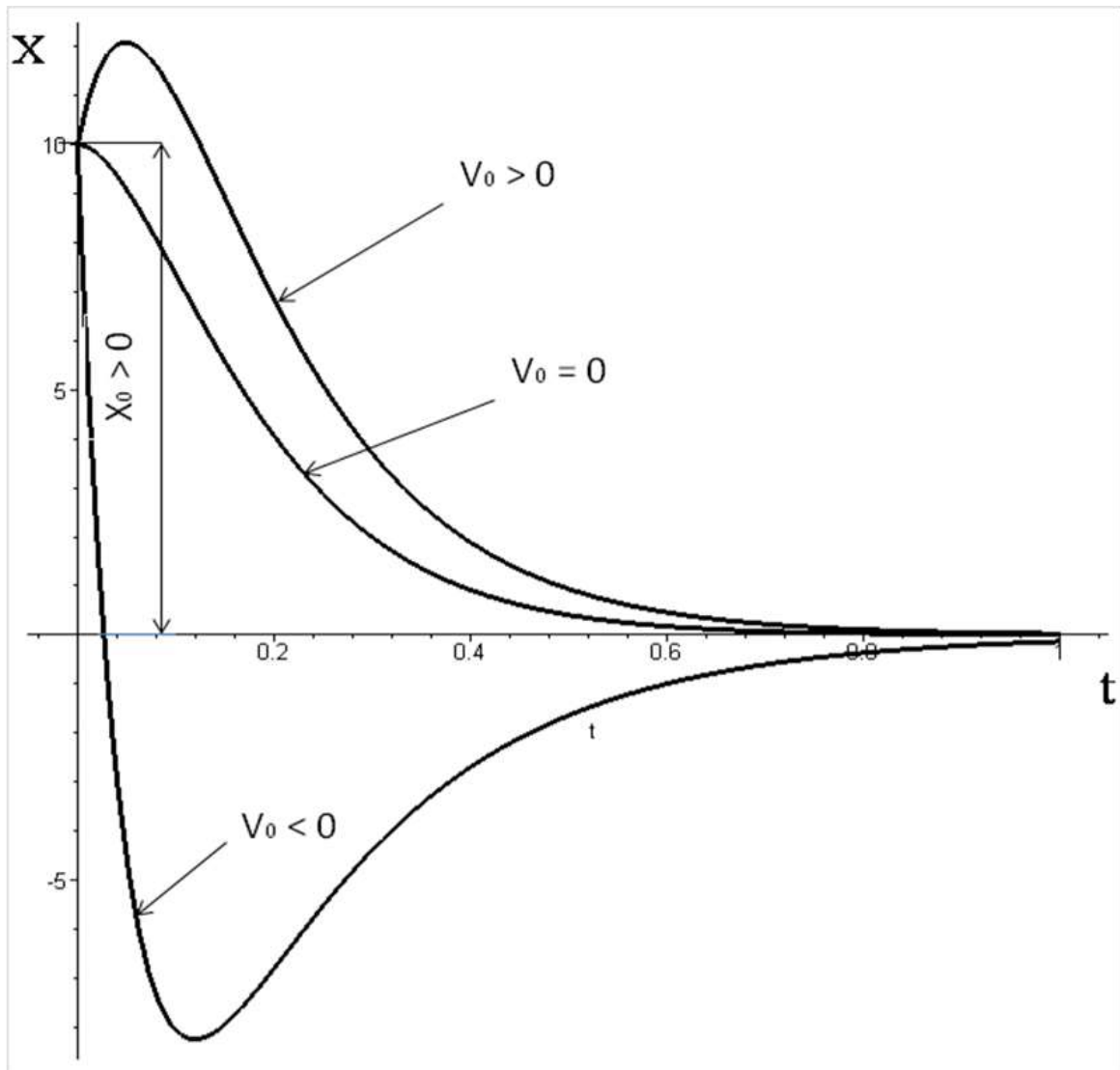


Рис. 3.1

в) случай малого сопротивления, когда сила сопротивления мала по сравнению с восстанавливающей силой, математически это описывается неравенством $n < k$. Решение ищется в виде

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_2 t)), \quad (3.3)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – круговая частота затухающих колебаний; C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Часто вместо (3.1) решение уравнения (2.6) ищется в амплитудной форме, которая легко выводится из (2.7):

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha), \quad (3.4)$$

здесь A и α константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Колебания, происходящие в соответствие с формулами (3.1) или (3.2), называются затухающими (рис. 3.2), так как из-за наличия множителя e^{-nt} – координата x (отклонение от положения статического равновесия – амплитуда) с течением времени убывает, стремясь к нулю.

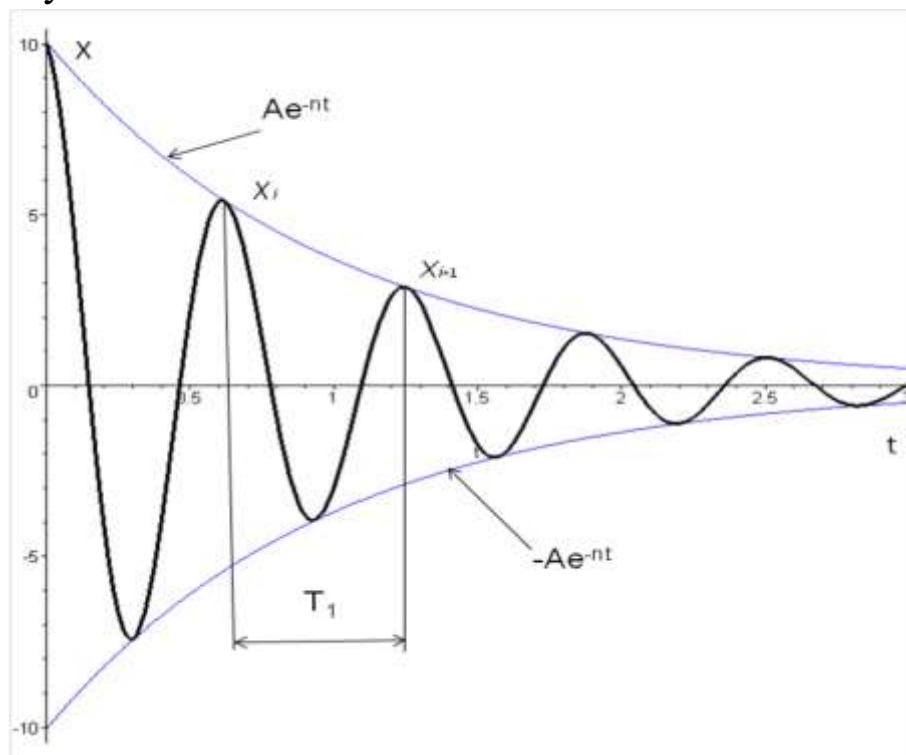


Рис. 3.2

Промежуток времени $T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ – принято называть периодом затухающих колебаний. Сравнивая с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$

свободных колебаний, следует заметить, что с увеличением сопротивления, период затухающих колебаний увеличивается.

Рассмотрим, как изменяется амплитуда затухающих колебаний за промежуток времени T_1 . Пусть в некоторый момент времени t_i имеем максимальное отклонение точки M от положения статического равновесия x_i (рис. 3.1), которое определяется формулой

$$x = Ae^{-nt_i} \sin(k_1 t_i + \alpha). \quad (3.5)$$

Следующее максимальное отклонение через интервал T_1 будет равно

$$x = Ae^{-n(t_i+T_1)} \sin(k_1 t_i + k_1 T_1 + \alpha). \quad (3.6)$$

Учитывая, что $k_1 T_1 = 2\pi$, получаем

$$x_{i+1} = x_i e^{-nT_1}. \quad (3.7)$$

Таким образом, амплитуды будут убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии называется декрементом затухающих колебаний:

$$D = e^{nT_1}. \quad (3.8)$$

Иногда пользуются логарифмическим декрементом колебаний:

$$\eta = \ln(D) = nT_1. \quad (3.9)$$

Затухание колебаний происходит достаточно быстро даже при небольшом сопротивлении. Так, например, при $n = 0,05k$ $T_1 = 1,00125T$ декремент затухающих колебаний $D = e^{-nT_1} = 0,731$, т.е. период затухающих колебаний T_1 отличается от периода свободных колебаний лишь на 0,125 %, а амплитуда за время одного колебания уменьшается на 0,27 своей величины, а после 10 полных колебаний становится равной лишь 0,043 своего первоначального значения. Таким образом, основное влияние сопротивления на свободные колебания выражается в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, т.е. затухании колебаний.

Для определения вязкости жидкости (коэффициент μ в (2.1)) Кулон использовал следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем

в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил периоды T – в первом случае и T_1 во втором.

Считая колебания в воздухе свободными, определяется частота этих колебаний из формулы

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}. \quad (3.10)$$

Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (3.11)$$

Из (3.4) и (3.7) определяется коэффициент затухания

$$n = \frac{2\pi\sqrt{T_1^2 - T^2}}{T_1 T} \quad (3.12)$$

и по нему рассчитывается коэффициент сопротивления

$$\mu = 2n \cdot m. \quad (3.13)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае коэффициент сопротивления зависит от коэффициента вязкости жидкости ν и площади пластинки S :

$$\mu = \nu S. \quad (3.14)$$

Из формулы (3.14), при известной площади пластинки, определяется в конечном итоге коэффициент вязкости жидкости ν .

4. Оборудование для выполнения работы

4.1. Активные клавиши

При выполнении лабораторной работы применяются следующие клавиши клавиатуры (рис. 4.1):

- W, S, A, D – для перемещения в пространстве;
- $F2, E$ – аналог средней кнопки манипулятора (при первом нажатии берется объект, при последующем – ставится);
- $F10$ – выход из программы.



Рис. 4.1

При работе с манипулятором (мышью) используются следующие клавиши (рис. 4.2):

- Левая клавиша мыши (1) – при нажатии и удерживании обрабатывается (поворачивается, переключается) тот или иной объект.
- Средняя клавиша (2) при первом нажатии (прокрутка не используется) берется объект, при последующем – ставится.
- Правая клавиша (3) – при нажатии появляется курсор-указатель, при повторном – исчезает.

Примечание: при появившемся курсоре невозможно переводить взгляд вверх и в стороны.

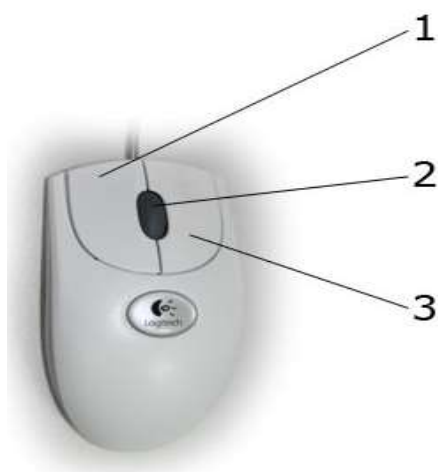


Рис. 4.2

4.2. Лабораторное оборудование

Установка для изучения закономерностей затухающих колебаний состоит из рамы, на верхний стержень которой подвешивается пружина с пластинкой, и сосудов с различными жидкостями для создания вязкого трения при колебаниях (рис. 4.3).

Комплектность лабораторной установки:

- пружины;
- комплект грузов;
- линейка;
- секундомер;
- линейка;
- емкость с вязкой жидкостью (бензин, вода, масло).



Рис. 4.3

4.3. Порядок выполнения работы

4.3.1. Предварительные измерения

1. Измерьте по шкале на раме статическое удлинение пружины.
2. Определите коэффициент жесткости пружины, как

$$c = \frac{P}{\Delta l}.$$



Рис. 4.4

3. Определите период свободных колебаний; измерив секундомером 10 полных колебаний пластинки в воздухе

4. Подсчитайте теоретическое значение периода свободных колебаний по формуле

$$T_{\text{теор}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c/m}}.$$

5. Результаты измерений занесите в табл. 1. При этом значения $T_{\text{теор}}$ и $T_{\text{эксп}}$ не должны значительно отличаться.

4.4. Исследование затухающих колебаний пластинки в вязкой жидкости

1. Поместите пластинку на пружине в сосуд связкой жидкостью. Пластинка должна находиться примерно в середине слоя жидкости.

2. Отклоните пластинку от равновесного состояния и секундомером замерьте время 5 полных колебаний.

3. Подсчитайте период затухающих колебаний в данной жидкости, запишите результаты в табл. 2.

4. Подсчитайте по формуле (3.12) величину коэффициента затухания и занесите в табл. 2.



Рис. 4.5

5. Запишите в табл. 2 какую часть коэффициент затухания n составляет от круговой частоты k (например, $n = 0,05k$).

6. Дайте в табл. 2 сравнение периодов затухающих и свободных колебаний (например, $T_1 = 1,0125T$).

7. По формуле (3.9) подсчитайте логарифмический декремент затуханий и занесите значение в табл. 2.

8. Подсчитайте декремент колебаний и занесите значение в табл. 2.

9. Подсчитайте и запишите на сколько уменьшается амплитуда колебаний за один период (например, $\Delta A = 0,25A_i$).

10. Отклоните пластину от равновесного положения на $x_0=2-3$ см, замерьте секундомером время до полного затухания колебаний, подсчитайте при этом их полное число

11. Постройте декрементные кривые – огибающие графика затухающих колебаний: $x = x_0 e^{-nt}$ (предельным значением t при построении взять значение, при котором величина x становится 1–2 мм).

12. Двигаясь до предела по оси времени с шагом, равным периоду колебаний, подсчитайте, сколько колебаний должна совершить пластинка. Сравните это число с результатом пункта 10.

5. Контрольные вопросы

1. Какие колебания совершает тело при наличии диссипативной силы сопротивления?

2. Как влияет на амплитуду колебаний диссипативная сила трения?

3. Период затухающих колебаний больше или меньше периода свободных колебаний?

4. Меняется ли с течением времени период затухающих колебаний?

5. Что такое декрементная кривая?

6. Как ее можно построить?

7. Что такое декремент затухающих колебаний?

8. Как подсчитать логарифмический декремент затухающих колебаний?

9. Вид дифференциального уравнения движения затухающих колебаний.

10. От каких факторов зависит диссипативная сила трения?

11. Какие параметры влияют на частоту свободных, а какие на частоту затухающих колебаний?

12. Приведет ли увеличение площади пластинки (при других неизменных параметрах) к увеличению периода затухающих колебаний?

13. Что показывает декремент затухающих колебаний?

6. Отчет

1. Заполнить табл. 1, 2.

2. Построить декрементные кривые, отложив на оси времен периоды затухающих колебаний.

Таблица 1

Предварительные измерения

Измеряемая величина	Обозначение	Ед. измер.	Числ. знач.	Способ измерения или подсчета
Площадь пластинки	S	м ²		Измер. линейкой
Вес пластинки	P	Н		Взвешивание
Масса пластинки	m	кг		$m = P/g$
Статическое удлинение пружины	$\delta_{ст}$	м		Измер. по шкале
Коэффициент жесткости	c	Н/м		$c = P/\delta_{ст}$
Период своб. кол. теор	$T_{теор}$	с		$T_{теор} = \frac{2\pi}{\sqrt{c/m}}$
Период своб. кол. 'ксп.	$T_{эксп}$	с		Измерение секундомером

Таблица 2

Исследование затухающих колебаний

	Вязкая жидкость			Способ измерения или вычисления
	бензин	вода	масло	
l	2	3	4	5
Время 5 полных колебаний t_5				Измерение секундомером
Период затухающих колебаний				$T_1 = t_5/5$
Коэфф. затухания				$n = \frac{2\pi\sqrt{T_1^2 - T^2}}{T_1 T}$
Сравнение n с k				$n/k =$
Сравнение периодов T_1 и T				$T/T_1 =$

1	2	3	4	5
Логарифмический декремент затухающих колебаний				$\eta = nT_1 = \frac{2\pi\sqrt{T_1^2 - T^2}}{T}$
Декремент затухающих колебаний				$D = e^{nT_1}$
На сколько уменьшается амплитуда за один период колебания				$A_{i+1} = A_i e^{nT_1}$ $\Delta A = A_{i+1} - A_i =$ $= A_i(1 - e^{nT_1})$
Время одного полного колебания				Измерение секундомером
Полное количество колебаний				Подсчет в процессе наблюдения

2.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Тема: Изучение кориолисовой силы инерции при относительном движении материальной точки.

Введение. В описании данной лабораторной работы приведены математическая постановка и решение задачи относительного движения точки в случае вращательного переносного движения.

Дано описание методики проведения экспериментов. С помощью демонстрационного прибора показано влияние направления вращения переносящего тела, скорости относительного движения материальной точки и значения угловой скорости переносного вращения на кориолисову силу.

Экспериментальная часть работы заключается в исследовании зависимости кориолисовой силы инерции от угловой скорости переносного вращения.

1. Цели лабораторной работы

1.1. На опыте убедиться в реальности кориолисовой силы инерции.

1.2. Экспериментально изучить влияние на нее некоторых кинематических факторов.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Изучить теоретическую часть темы и конструкцию экспериментальной установки.

2.2. Изучить демонстрационную и расчетную часть работы.

2.3. Изучить методику проведения экспериментов и провести их

2.4. Оформить полученные результаты и сделать необходимые выводы по результатам работы.

3. Теоретические основы лабораторной работы

В данной работе рассматривается установка, схема которой показана на рис. 3.1. Установка состоит из неподвижной стойки 1 (трубки), вращающейся вокруг оси Oz платформы 2, на которой

укреплены две пластинчатые пружины 3 и указатели 4. Материальная точка выполнена в виде шариков 5 (из стали и алюминиевого сплава), которые могут двигаться прямолинейно по платформе, в то время как платформа вращается вокруг оси Oz .

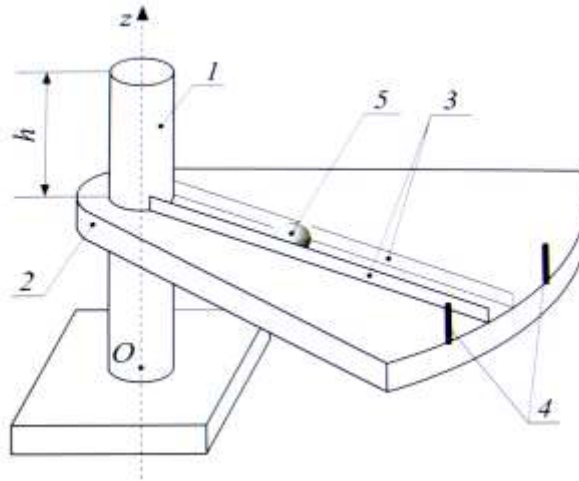


Рис. 3.1. Схема демонстрационного прибора ТМД-06М

В эксперименте материальная точка (шарик) опускается в трубку и падает с высоты h (рис. 3.1). Трубка сопрягается со скруглением, на которое падает шарик, и без удара катится по скруглению, затем по прямой между пружинами 3, закрепленными на платформе 2. Принято, что платформа во время эксперимента вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Падение с высоты h без начальной скорости описывается теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A_{mg}, \quad (3.1)$$

где $T_0 = 0$ – кинетическая энергия шарика в начале движения.

Кинетическая энергия внизу трубки при падении шарика равна

$T = \frac{mv^2}{2}$. Работа силы тяжести при падении шарика равна

$$A_{mg} = mgh. \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.1) и (3.2) следует, что $v = \sqrt{2gh}$. Эта скорость является начальной при прямолинейном движении шарика по платформе.

Рассмотрим движения шарика (точка M). Точка M совершает сложное движение. Свяжем подвижную систему координат xuz

с платформой, тогда прямолинейное движение точки M по платформе является относительным со скоростью v_r .

Согласно расчетной схеме, которая отражает реальное движение рассматриваемой механической системы, получаем классическую задачу теоретической механики на относительное движение точки, которая совершает переносное вращение вместе с платформой. Уравнение движения точки в абсолютной системе координат xuz имеет вид

$$m\bar{a}_a = \sum \bar{F}_\Phi, \quad (3.3)$$

где m – масса точки (шарика M на рис. 3.2); \bar{a}_a – абсолютное ускорение точки; \bar{F}_Φ – сумма внешних сил (силы заданные и реакции связей).

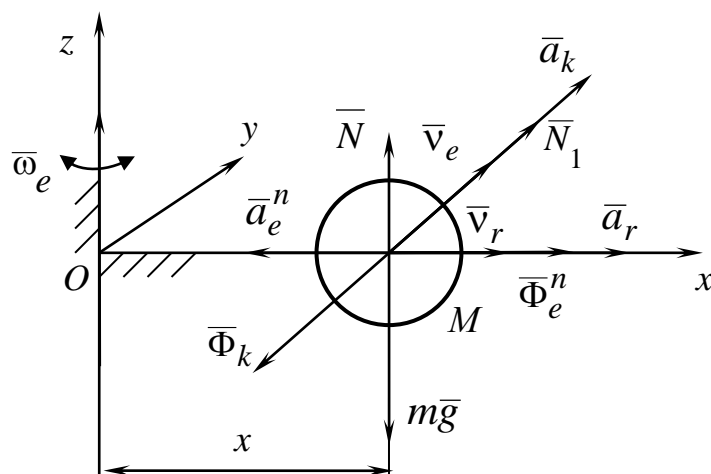


Рис. 3.2. Расчетная схема движения точки по платформе

Известно, что в общем случае сложного движения точки

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \quad (3.4)$$

где \bar{a}_r , \bar{a}_e , \bar{a}_k – относительное, переносное и кориолисово ускорения.

Из рис. 3.2 следует

$$\sum \bar{F}_\Phi = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{N}_1, \quad (3.5)$$

где \bar{N}_1 – реакция правой пластинчатой пружины 3 (рис. 3.1) – упругая сила пружины.

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k) &= -m\bar{g} + \bar{N} + \bar{N}_1, \\ m\bar{a}_r &= -m\bar{g} + \bar{N} + \bar{N}_1 - m\bar{a}_e - m\bar{a}_k = \bar{N}_1 + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $-m\bar{g} + \bar{N} = 0$; $-m\bar{a}_e = \bar{\Phi}_e^n$; $-m\bar{a}_k = \bar{\Phi}_k$ – переносная и кориолисова силы инерции.

Уравнение (3.6) примет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{N}_1 + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (3.7)$$

Это дифференциальное уравнение движения точки в подвижной системе координат xuz или уравнение относительного движения.

Нам надо найти кориолисову силу инерции $\bar{\Phi}_k$ и переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$.

Спроектируем векторное уравнение (3.7) на ось x

$$m\ddot{x} = \Phi_e^n = ma_e^n = \frac{mv_\tau^2}{x} = \frac{m\omega_e^2 x^2}{x} = m\omega_e^2 x. \quad (3.8)$$

Для определения относительной скорости шарика $v_r = \dot{x}$ проинтегрируем уравнение (3.8) при начальных условиях: при $t=0$, $x=0$, $\dot{x}_0 = v_0$. Для этого преобразуем уравнение (3,8) следующим образом

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \omega_e^2 x.$$

Тогда получим

$$\dot{x}d\dot{x} = \omega_e^2 xdx. \quad (3.9)$$

Интегрируя (3.9), при оговоренных выше начальных условиях, получим:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \omega_e^2 \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\dot{x}^2 = \omega_e^2 x^2 + C; \quad C = v_0^2.$$

Окончательно для относительной скорости v_r получаем выражение:

$$v_r = \dot{x} = \sqrt{\omega_e^2 x^2 + v_0^2}. \quad (3.10)$$

Проецируя уравнение движения (3.8) на оси y и z , соответственно получим:

$$m\ddot{y} = 0 = N_1 + \Phi_k, \quad (3.11)$$

где сила Кориолиса $\bar{\Phi}_k = m\bar{a}_k = 2m(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$, и ее модуль

$$\Phi_k = 2m\omega_e v_r, \quad (3.12)$$

$$m\ddot{z} = 0 = N - mg \text{ и } N = mg.$$

Согласно (3.11) $|\Phi_k| = |N_1|$ и модуль силы Кориолиса теоретически можно оценить по уравнению (3.12):

$$\Phi_k = 2m\omega_e v_r = 2m\omega_e \sqrt{\omega_e^2 x^2 + v_0^2}. \quad (3.13)$$

Экспериментально силу Кориолиса можно оценить с помощью установки по величине силы упругости пружины N_1 .

4. Описание экспериментальной установки

Общий вид (сборочный чертеж) установки представлен на рис. 4.1. Прибор выполнен в настольном исполнении и состоит из основания 1 с узлом подшипников 2, лотком для шариков 11, амортизирующими опорами 3. На основании подвижно закреплена горизонтальная платформа 4, на которой установлены пластинчатые пружины 5, два визира 6, скользящие по направляющим 7. Платформа имеет также ловушку 8 для шариков 13, стационарную вертикальную направляющую 9, к которой может присоединиться съемная труба 10. Платформа в своей нижней части снабжена специальным каналом 12, по которому шарики 13 из ловушки 8 попадают в лоток 11. Для более плавного вращения платформы и устойчивости прибора на столе в конструкцию введен противовес 14.

При выполнении эксперимента шарик опускают в вертикальную направляющую 9 вращающейся платформы (скорость вращения платформы считают постоянной). Шарик падает с высоты, а затем движется прямолинейно, проходя вдоль пластинчатых пружин 5, что приводит к отклонению их от первоначального прямолинейного состояния. При этом указатели 6 отклоняются пружинами до определенного положения в момент, когда шарик покидает платформу и попадает в ловушку 8.

Масса шарика из стали $m_c = 62\text{г}$. Масса шарика из алюминиевого сплава $m_a = 34\text{г}$.

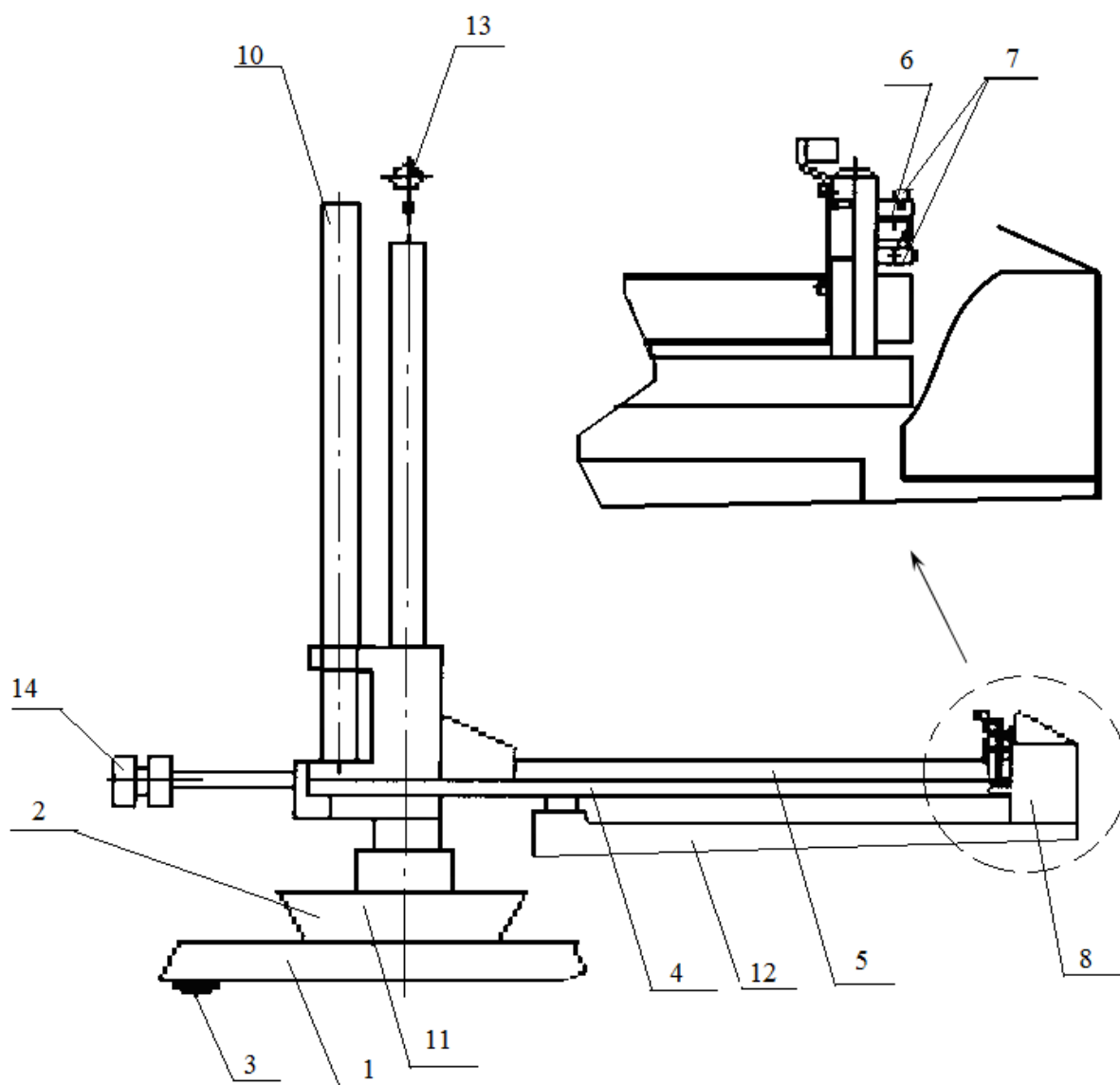


Рис. 4.1. Сборочный чертеж установки ТМд-06м

Длина трубок (закрепленной и съемной) $h = 50 \text{ см}$. Длина направляющей, образованной пластинчатыми пружинами $L = 24,5 \text{ см}$. Коэффициент жесткости пружины $c = 56 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

5. Методика выполнения лабораторной работы

Уравнение для кориолисовой силы инерции имеет вид:

$$\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = -2m(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

Из этого уравнения следует:

1) кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_k$ направлена в противоположную сторону вектора кориолисова ускорения \bar{a}_k . Направление \bar{a}_k определяется согласно рис. 5.1;

2) направление $\bar{\Phi}_k$ зависит от направления переносного вращения, т.е. от направления вектора $\bar{\omega}_e$;

3) величина Φ_k зависит от массы точки m , угловой скорости ω_e и скорости относительного движения v_r .

В работе справедливость этих положений необходимо проверить на установке.

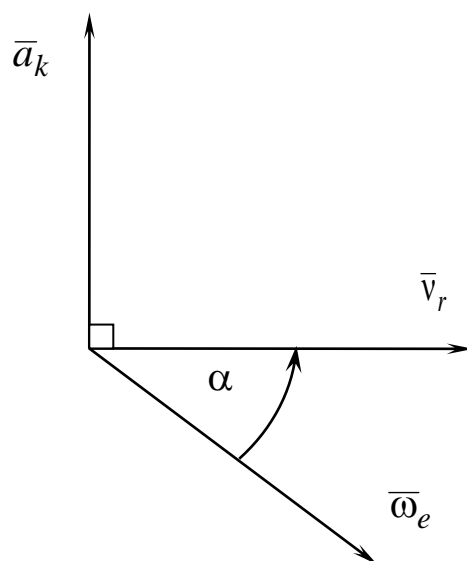


Рис. 5.1. К определению направления вектора \bar{a}_k

План выполнения демонстрационной части работы.

1. Демонстрация изменения направления кориолисовой силы инерции при изменении направления переносного вращения (вращение платформы).

Обеспечить вращение горизонтальной платформы (вручную) против часовой стрелки. Опустить стальной шарик в трубку и наблюдать отклонения правого, по ходу шарика, указателя и визира.

При вращении платформы по часовой стрелке убедится в том, что шарик отклоняет левый указатель и визир.

План выполнения экспериментальной части работы.

1. Проверить зависимость величины кориолисовой силы инерции от изменения частоты переносного вращения (вращения платформы).

Задать вращение платформе, с помощью секундомера определить время T (в секундах), в течение которого платформа совершает N оборотов (не менее 5 оборотов). Угловая скорость платформы в этом случае рассчитывается следующим образом:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{T}.$$

Во время вращения платформы шарик опустить в трубку. Снять значение отклонения указателя и визира. Рассчитать кориолисову силу инерции по формуле:

$$\Phi_k = 2m\omega_e v_r,$$

где относительная скорость шарика определяется следующим образом:

$$v_r = \sqrt{\omega_e^2 x^2 + v_0^2},$$

здесь $x = L$ – длине направляющей, образованной пластинчатыми пружинами;

$v_0 = \sqrt{2gh}$ – начальная скорость шарика при движении по платформе.

Также по отклонению указателей и визиров можно определить величину упругой силы пружин. В данном случае, это сила N_1 , рассчитываемая по формуле

$$N_1 = c\lambda,$$

где c – жесткость пластинчатых пружин; λ – деформация пластинчатых пружин.

Деформацию пружины определяют по отклонению указателей.

Сравнить упругую силу пружины и кориолисову силу инерции:

$$\delta = \left| \frac{\Phi_k}{N_1} - 1 \right| \cdot 100\% .$$

Проделать опыт повторно с тем же шариком при той же высоте трубки, изменяя частоту вращения платформы. Убедиться в том, что при увеличении частоты вращения платформы при прочих равных условиях, величина отклонения указателей и визиров увеличивается. Величину отклонения указателей и соответствующие угловые скорости платформы занести в таблицу, выполнить расчеты.

2. Проверить зависимость величины кориолисовой силы инерции от относительной скорости (скорость перемещения шарика по горизонтальной платформе, зависящей от высоты падения шарика).

Задать вращение платформе в любую сторону, определить ее угловую скорость, как описано в опыте 1. Во время вращения платформы опустить стальной шарик в трубку, снять отклонение указателя. Проделать опыт повторно с тем же шариком, присоединив съемную трубу (т.е. увеличив высоту падения шарика). Убедиться в том, что при большей относительной скорости шарика (большей высоте падения) величина кориолисовой силы инерции увеличивается.

Записать величины отклонений указателей и визиров. Рассчитать значения силы кориолиса и силы упругости пружины, сравнить полученные значения.

3. Проверить зависимость величины кориолисовой силы инерции от массы шарика.

Задать вращение платформе в любую сторону, определить ее угловую скорость, как описано в опыте 1. Во время вращения платформы опустить стальной шарик в трубку, снять отклонение указателя. Проделать опыт повторно с шариком из алюминиевого сплава. Убедиться в том, что шарик большей массы отклоняет указатель на больший угол. Рассчитать значения силы кориолиса и силы упругости пружины, сравнить полученные значения.

Результаты проведенных экспериментов занести в таблицу.

Результаты эксперимента

№ п/п	Масса шарика, кг	T , с	N , об.	Отклонение указателя, λ , мм	ω , рад/с	v_r м/с	Φ_k , Н	N_1 , Н	δ , %
1									
2									
3									
4									
5									
6									

6. Содержание и оформление отчета

Отчет о проделанной работе должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Выполнить расчеты и заполнить таблицу.
4. Сделать выводы о соответствии теоретических и экспериментальных закономерностей.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение относительного, переносного и абсолютного движений точки (шарика)?
2. При каком характере переносного движения возникает ускорение Кориолиса?
3. Чему равен модуль ускорения Кориолиса?
4. Как определяется направление вектора ускорения Кориолиса?
5. Как определить модуль и направление вектора кориолисовой силы инерции?

3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Тема: Изучение и опытное определение геометрических характеристик распределения масс в твердом теле.

1. Общие теоретические положения

Движение твердого тела зависит от действующих сил, от суммарной массы в твердом теле. Рассмотрим некоторые понятия, характеризующие распределение масс.

1.1. Масса твердого тела, центр масс

Масса твердого тела равна арифметической сумме масс всех материальных точек или частиц, составляющих тело:

$$M = \sum m_k .$$

В однородном поле тяжести, для которого $g = const$, вес любой частицы пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс прежде всего можно судить по положению центра тяжести твердого тела.

Координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum p_k x_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum p_k y_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum p_k z_k}{P}. \quad (1.1)$$

Учитывая, что в однородном поле $p_k = gm_k$ и $P = gM$, подставляем в (1.1) и сокращаем на g , после чего имеем:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}; \quad z_c = \frac{\sum p_k z_k}{M}. \quad (1.2)$$

В записанные формулы (1.1) и (1.2) входят:

p_k – вес отдельных материальных точек (частиц), из которых состоит твердое тело;

m_k – масса тех же частиц;

P – вес твердого тела;

M – масса твердого тела;

x_k, y_k, z_k – координаты отдельных материальных точек. Следовательно, точка $(x_c; y_c; z_c)$ действительно характеризует распределение масс в теле.

Данная точка называется *центром масс* или *центром инерции твердого тела*. Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести тела, понятия эти не являются тождественными. Центр масс – характеристика распределения масс для любой системы материальных точек или твердого тела. Это понятие имеет смысл независимо от того, находится ли тело под действием сил или нет. Центр тяжести более узкое понятие, оно имеет смысл лишь для тел, находящихся в поле тяготения. Данное понятие было введено в статике.

1.2. Моменты инерции

Положение центра масс характеризует распределение масс не полностью. Поэтому при изучении динамики твердого тела вводятся новые характеристики распределения масс – моменты инерции.

Моменты инерции относительно оси. Моментом инерции относительно оси (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от этой оси

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot h_k^2. \quad (1.3)$$

Размерность момента инерции:

$$[J] = [\text{масса}] \cdot [\text{длина}]^2.$$

В каждой системе единиц эта размерность своя и зависит от выбора единиц измерения массы и длины.

Часто используемое понятие – радиус инерции – это такая линейная величина, $\rho_{\text{ин}}$ которая определяется из равенств:

$$J_z = M \cdot \rho_{\text{ин}}^2, \quad (1.4)$$

т.е. радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси z такой точки массы M , момент инерции которой относительно этой оси равен J_z .

Рассмотрим некоторое твердое тело. В некоторой точке тела поместим декартовые оси координат и свяжем их с телом (рис. 1.1).

Если расстояние k -й точки от оси z равен h_k и масса ее m_k , то по определению

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot h_k^2.$$

Это момент инерции тела относительно оси z .

Из рис. 1.1 видно, что

$$h_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

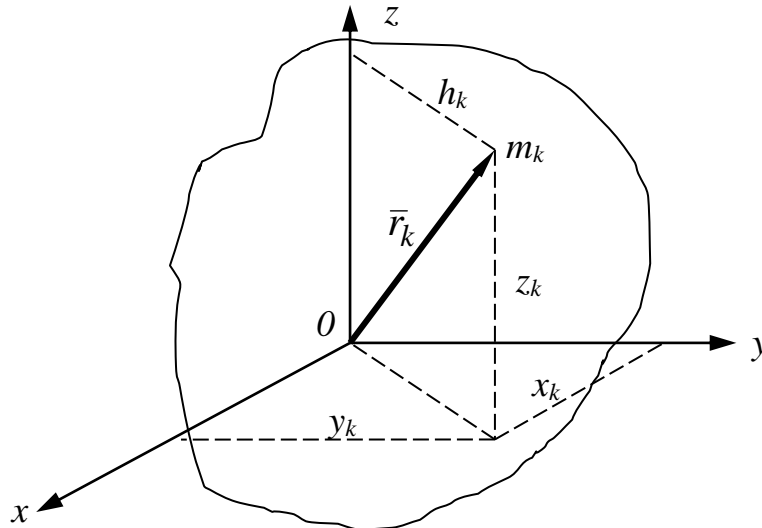


Рис. 1.1

Поэтому

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (1.5)$$

По аналогичным формулам будут вычисляться и моменты инерции относительно осей Ox и Oy :

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ J_y &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Формулы (1.3), (1.5) и (1.6) справедливы и для твердого тела, и для любой системы материальных точек. Если имеем сплошное распределение масс, т.е. сплошное твердое тело, то, разбивая его на элементарные частицы, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (1.3), обратится в интеграл. Учитывая, что

$$dm = \rho dV,$$

где ρ – плотность; V – объем, получим

$$J_z = \int_V h^2 dm$$

или

$$J_z = \int_V \rho h^2 dV. \quad (1.7)$$

Здесь интеграл распространен на весь объем, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Формулы (1.5) и (1.6) примут аналогичный вид:

$$J_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV. \quad (1.8)$$

Моменты инерции для сплошных твердых тел вычисляются методом интегрального исчисления сравнительно легко только в тех случаях, когда тела имеют правильную геометрическую форму и когда эти тела однородные ($\rho = const$). В случае неоднородных тел и сложной геометрической формы моменты инерции проще и надежнее определяются экспериментальным путем. С некоторыми способами экспериментального определения моментов инерции знакомит данное лабораторное занятие.

Теорема Гюйгенса. Эта теорема дает зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Теорема доказывает, что момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела (т. С), и произведения массы твердого тела на квадрат расстояний между параллельными осями, т.е.

$$J_z = J_{zc} + Md^2. \quad (1.9)$$

1.3. Некоторые практические советы по вычислению моментов инерции

1. Если требуется вычислить момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс, то проводят параллельную ось через центр масс твердого тела, вычисляют моменты инерции относительно этой оси и применяют теорему Гюйгенса. При этом расстояние между осями должно быть известно.

2. Если надо вычислить момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел, причем моменты инерции каждого из тел отдельно известны, то определяют момент инерции системы относительно оси, как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси.

3. При вычислении момента инерции однородной плоской фигуры относительно некоторой оси выделяют в плоской фигуре такую элементарную площадь, момент инерции всех элементарных площадей, т.е. применяют интегрирование по всей площади.

4. При вычислении момента инерции однородного трехмерного твердого тела относительно некоторой оси, выделяют в твердом теле элементарные объемы, моменты инерции которых, легко вычисляются. Затем интегрируют по всему объему.

1.4. Примеры вычисления моментов инерции некоторых однородных тел

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой M (рис. 1.2). Вычислим момент инерции относительно оси Oz , перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов.

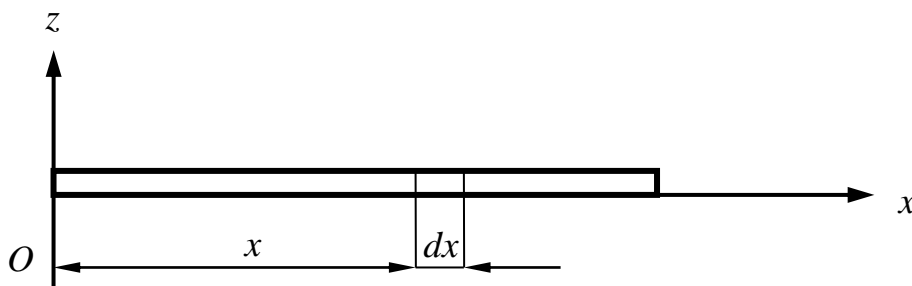


Рис. 1.2

Направим ось Ox по стержню. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса

$$dm = \rho dx,$$

где $\rho = \frac{M}{l}$ – масса единицы длины стержня. Согласно формуле (1.7),

$$J_z = \int_V h^2 dm = \int_0^l x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{x^3}{3} \Big|_0^l.$$

Окончательно:

$$J_z = \frac{1}{3} M l^2. \quad (1.10)$$

2. Круглая однородная пластинка (диск) радиусом R и массой M .

Вычислим момент инерции относительно оси z , перпендикулярной плоскости пластинки и проходящей через центр тяжести O (рис. 1.3).

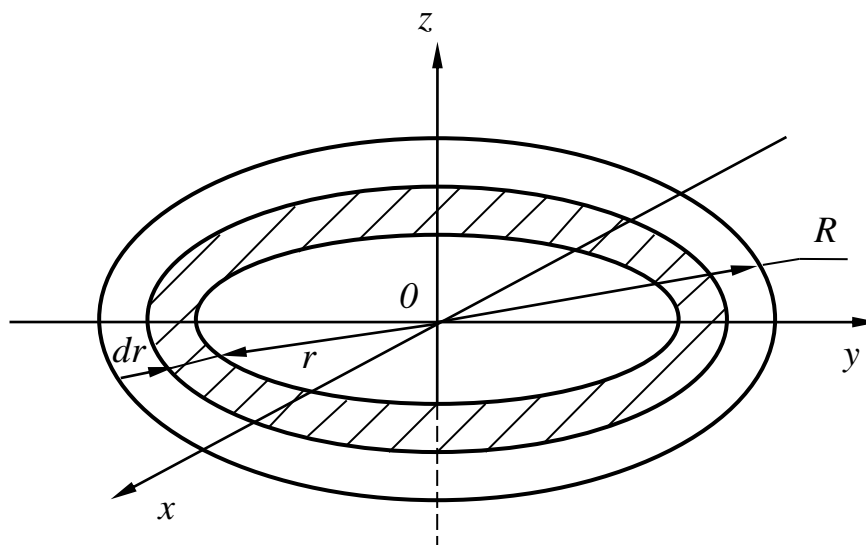


Рис. 1.3

Выделим элементарное кольцо радиусом r и толщиной dr . Площадь кольца $2\pi r dr$, масса $dm = \rho \cdot 2\pi r dr$, где ρ – масса единицы площади $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$.

Момент инерции выделенного кольца вычисляется по формуле (1.2) из табл. 1:

$$dJ = r^2 dm = 2\pi \rho r^3 dr.$$

Интегрируя, находим:

$$J_z = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho R^4.$$

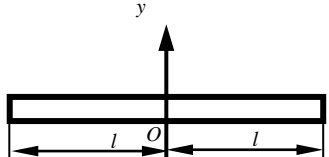
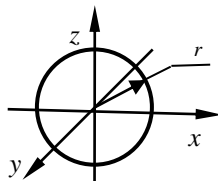
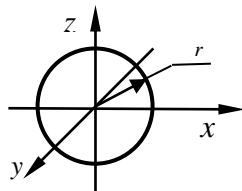
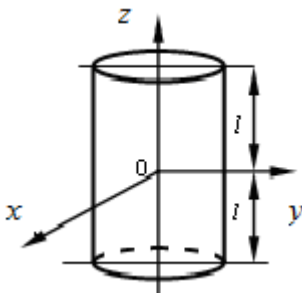
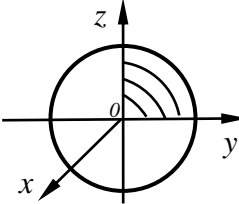
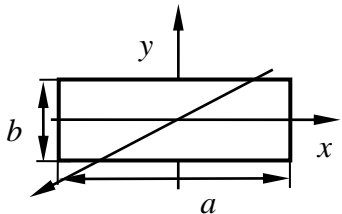
Окончательно:

$$J_z = \frac{1}{2} M R^2. \quad (1.11)$$

Такая же формула получится и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра массой M и радиусом R относительно оси, проходящей через геометрическую ось цилиндра.

Моменты инерции некоторых однородных тел простой геометрической формы приведены в табл. 1.

Таблица 1

№№	Наименование	Схема тел	Момент инерции
1	Тонкий прямолинейный стержень		$J_z = \frac{Ml^2}{3}$
2	Кольцо (материальная окружность)		$J_y = Mr^2$ $J_x = J_z = \frac{Mr^2}{2}$
3	Круглый тонкий диск		$J_y = \frac{Mr^2}{2}$ $J_x = J_z = \frac{Mr^2}{4}$
4	Круглый цилиндр		$J_z = \frac{Mr^2}{2}$ $J_x = J_y = M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$
5	Шар		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} r^2$
6	Тонкий прямоугольник		$J_x = \frac{Mb^2}{12}; J_y = \frac{Ma^2}{12};$ $J_z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$

1.5. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело вращается относительно неподвижной оси z , то дифференциальное уравнение, описывающее это движение, имеет вид:

$$J_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \quad (1.12)$$

Угловое ускорение тела:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

Сумма моментов относительно оси z всех внешних сил, действующих на тело:

$$M_z^e = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^e).$$

Уравнение (1.12) по своему внешнему виду аналогично дифференциальному уравнению прямолинейного движения точки

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = R_x.$$

Уравнение (1.12) показывает, что при данном вращающем моменте M_z^e чем больше момент инерции J_z , тем меньше угловое ускорение ε тела и наоборот. Следовательно, мы можем рассматривать момент инерции J_z как меру инертности твердого тела при его вращательном движении вокруг данной оси.

2. Методы опытного определения моментов инерции

2.1. Метод математического маятника

2.1.1. Теория физического маятника

Тяжелое твердое тело произвольной формы, вращающееся только под влиянием силы тяжести P вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела, называется *физическим маятником* (рис. 2.1).

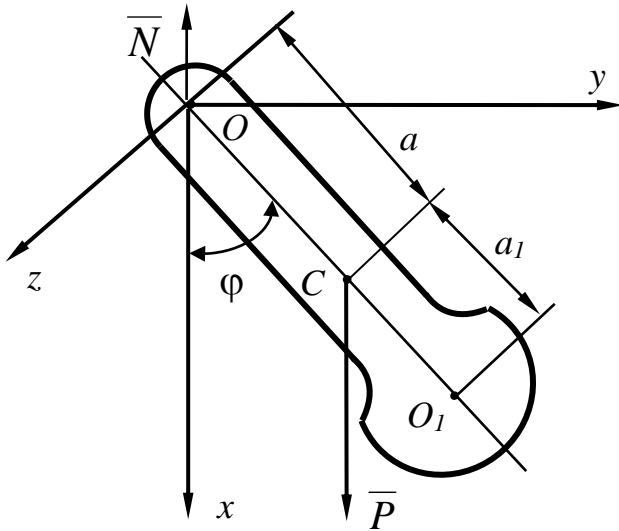


Рис. 2.1

Примем за ось z неподвижной системы координат горизонтальную ось подвеса маятника (рис. 2.1), а за начало координат возьмем точку O пересечения этой оси с плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс тела – точку C . При этом точка O называется точкой подвеса физического маятника. Обозначим расстояние OC от центра тяжести до точки подвеса

через a . Положение маятника будем определять углом отклонения φ линии OC от вертикали. На физический маятник действуют две силы: сила тяжести \bar{P} , приложенная в центре тяжести – т. C , и реакция оси подвеса \bar{N} , которую мы считаем направленной перпендикулярно оси подвеса z , так как силы трения в оси подвеса мы не учитываем.

Чтобы составить дифференциальное уравнение движения маятника можно воспользоваться уравнением (1.12), где следует положить

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^e) = m_z(\bar{P}) + m_z(\bar{N}) = -Pa \sin \varphi,$$

так как

$$m_z(\bar{N}) = 0$$

(знак минус взят потому, что направление вращающего момента противоположно положительному направлению отсчета угла φ). Поскольку других сил нет, то уравнение (1.12) примет вид:

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Pa \sin \varphi,$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где $k^2 = \frac{Pa}{J_z}$. Ограничиваясь изучением малых колебаний, можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$ и заменить уравнение (2.1) линейным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0. \quad (2.2)$$

Отсюда видим, что малые колебания физического маятника, как и математического, являются гармоническими. Период малых колебаний физического маятника определяется из равенства

$$T_{\text{физ}} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Pa}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mga}}, \quad (2.3)$$

где M – масса физического маятника.

Вспомним формулу для определения периода малых колебаний математического маятника

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.4)$$

Найдем длину l_{np} физического маятника, чтобы $T_{\text{физ}} = T_M$. Сравнивая формулу (2.3) с формулой (2.4), найдем, что

$$l_{np} = \frac{J_z}{Ma}. \quad (2.5)$$

При этом условии период малых колебаний математического маятника совпадает с периодом малых колебаний соответствующего физического маятника. Длина l_{np} такого математического маятника, период малых колебаний которого равен периоду малых колебаний данного физического маятника, называется *приведенной длиной физического маятника*. Точка O_1 , отстоящая от точки подвеса O на расстоянии $OO_1 = l_{np}$, называется центром качаний физического маятника (рис. 2.1).

Согласно теореме Гюйгенса, имеем

$$J_z = J_c + Ma^2,$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести C тела и параллельной оси z . Следовательно, приведенная длина физического маятника имеет вид:

$$l_{np} = a + \frac{J_z}{Ma} = a + a_1. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что приведенная длина $l = OO_1$ физического маятника всегда больше расстояния $a = OC$, т.е. центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра тяжести.

Вычислим приведенную длину физического маятника l_{1np} в том случае, когда ось подвеса проходит через центр качаний O_1 . Так как момент инерции тела относительно оси z_1 , проходящей параллельно оси z через точку O_1 , будет

$$J_{z_1} = J_c + M(O_1C)^2,$$

то

$$l_1 = \frac{J_{z_1}}{M(O_1C)} = \frac{J_c + M(O_1C)^2}{M(O_1C)} = \frac{J_c}{M(O_1C)} + O_1C.$$

Но из формулы (2.6) следует, что

$$a_1 = O_1C = \frac{J_c}{Ma},$$

поэтому

$$l_{1np} = a + \frac{J_c}{Ma} = l_{np}, \quad (2.7)$$

т.е. приведенная длина физического маятника в этом случае будет той же, что и прежде. Следовательно, и период колебаний останется тем же.

Таким образом, *колебания физического маятника остаются совершенно одинаковы, если точку подвеса перенести из точки O в точку O_1 и наоборот, причем расстояние между этими точками равно приведенной длине физического маятника.*

Это положение составляет содержание теоремы Гюйгенса о свойстве взаимности точки подвеса и центра качаний физического маятника.

2.2. Экспериментальное определение момента инерции

Способ 1. Подвесим тело, вес которого P известен, так, чтобы ось A_z , относительно которой будут происходить колебания, была горизонтальной. Тело в этом случае представляет собой физический маятник (рис. 2.2). С помощью секундомера определим период малых колебаний – величину T . Затем методом взвешивания (метод,

изучаемый в статике) определим расстояние a_1 от точки подвеса A до центра тяжести тела C (AC).

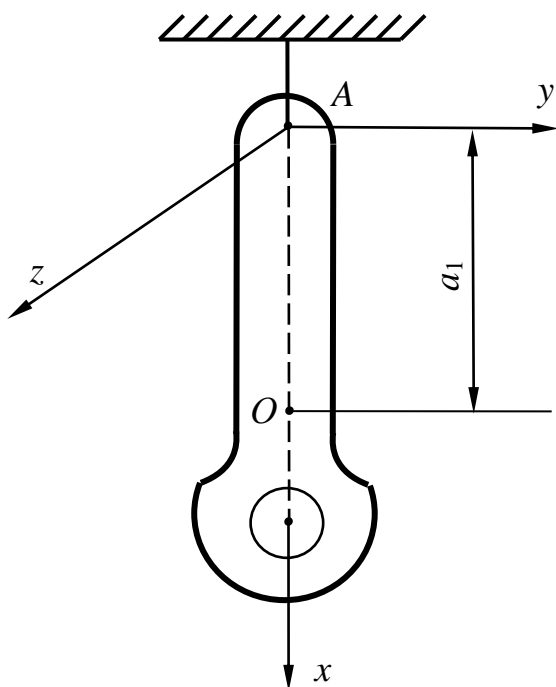


Рис. 2.2

Подставим найденные значения T и a в формулу (2.3) и из нее определим J_z :

$$J_z = \frac{P a_1 T^2}{4\pi^2}. \quad (2.8)$$

Если требуется определить момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, то можно воспользоваться теоремой Гюйгенса (см. формулу 1.9):

$$J_{Cz} = J_z - \frac{P}{g} a_1^2. \quad (2.9)$$

Здесь J_{Cz} – центральный момент инерции относительно оси, параллельной оси z .

Способ 2. Если тело имеет два отверстия, центры которых лежат на одной прямой с центром тяжести этого тела, то момент инерции этого тела можно определить следующим образом.

1. Подвесим тело так, чтобы оно завершило колебания в вертикальной плоскости относительно оси Az_1 , проходящей через точку A отверстия I (рис. 2.3), и определим период малых колебаний, который связан с моментом инерции относительно оси $Az_1 \leftrightarrow Jz_1$, следующим образом:

$$Jz_1 = \frac{P a_1 \cdot T_1^2}{4\pi^2}. \quad (2.10)$$

2. Подвесим тело совершенно аналогично так, чтобы колебания проходили относительно оси Bz_2 , проходящей через точку B отверстия II (рис. 2.4).

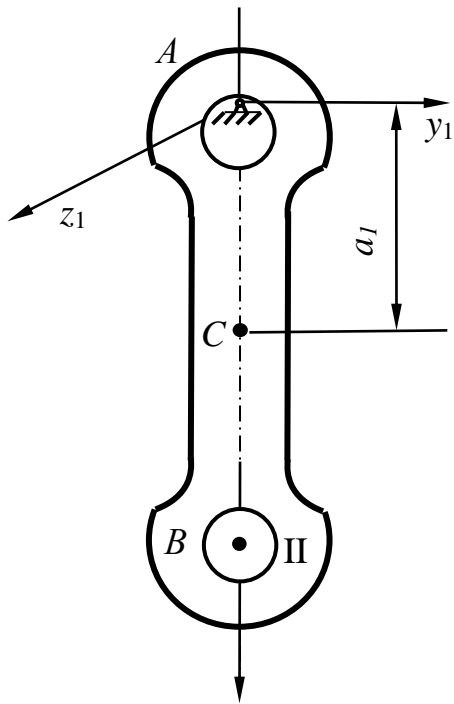


Рис. 2.3

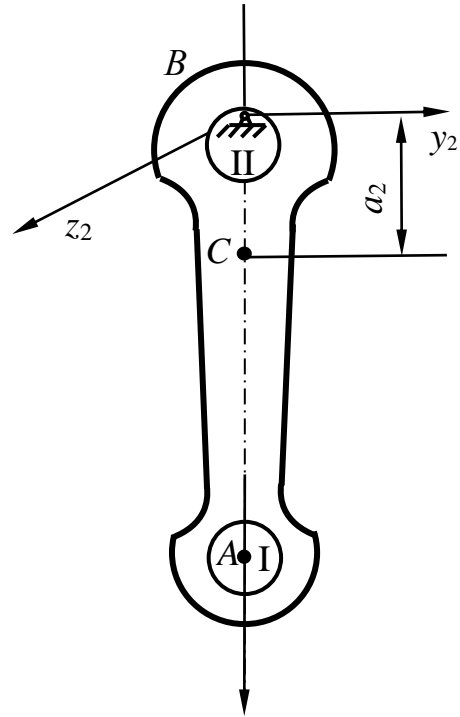


Рис. 2.4

Определим период колебаний T_2 , в этом случае он связан с моментом инерции J_{z_2} следующей формулой:

$$\frac{Pa_2 \cdot T_2^2}{4\pi^2} = J_{z_2}. \quad (2.11)$$

3. Моменты инерции J_{z_1} и J_{z_2} с центральным моментом инерции тела относительно оси, параллельной осям z_1 и z_2 , связаны следующими формулами, вытекающими из теоремы Гюйгенса:

$$J_{Cz} + \frac{P}{g} a_1^2 = J_{z_1}, \quad (2.12)$$

$$J_{Cz} + \frac{P}{g} a_2^2 = J_{z_2}. \quad (2.13)$$

4. Путем обмера исследуемого тела, определим расстояние AB , которое равно

$$a = a_1 + a_2. \quad (2.14)$$

5. Подставим J_{z_1} (2.10) в (2.12), J_{z_2} (2.11) и $a_2 = a - a_1$ (2.14) в уравнение (2.13):

$$\left. \begin{aligned} J_{Cz} + \frac{P}{g} a_1^2 &= \frac{Pa_1 \cdot T_1^2}{4\pi^2} \\ J_{Cz} + \frac{P}{g} (a - a_1)^2 &= \frac{P(a - a_1)T_2^2}{4\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Система уравнений (2.15) содержит две неизвестные величины J_{Cz} и a_1 . Решая систему, можно определить J_{Cz} по измерениям T_1 , T_2 и a .

2.3. Определение момента инерции с помощью крутильных колебаний

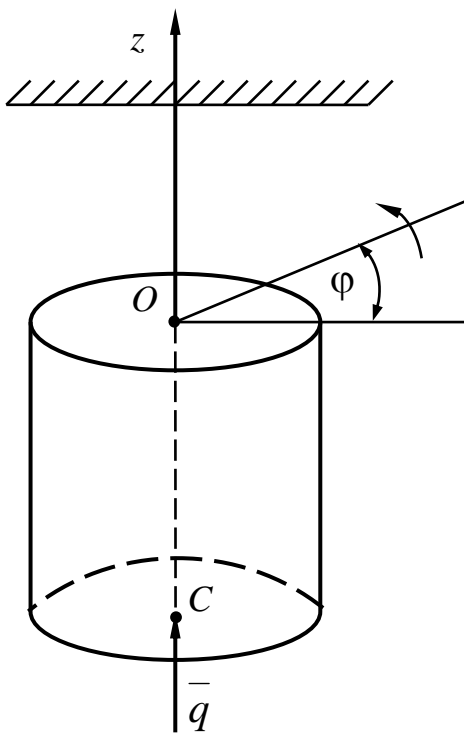


Рис. 2.5

Испытуемое тело подвесим на тонкой упругой проволоке в точке O , с помощью данного метода имеется возможность определить момент инерции J_z относительно оси, проходящей через центр тяжести и через точку подвеса (рис. 2.5). После закручивания проволоки тело совершает вращение вокруг неподвижной вертикальной оси под действием упругих сил проволоки. Момент этих сил равен:

$$m_z = c\varphi,$$

где c – коэффициент упругости, зависящий от материала проволоки и ее размеров (толщины и длины).

Дифференциальное уравнение вращательного движения (1.12) имеет следующий вид:

$$J_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \quad (2.16)$$

где J_z – момент инерции вокруг центральной оси, направленной по проволоке.

Так как (2.16) имеет вид уравнений гармонических колебаний при значении $k^2 = \frac{c}{J_z}$, то полученное вращение тела называется крутильными колебаниями. Период этих колебаний составляет:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{c}}. \quad (2.17)$$

На основе данного уравнения можно определить момент инерции J_z . Для этого надо поступить следующим образом:

а) с помощью секундомера определить период крутильных колебаний T ;

б) для определения величины c на этой же проволоке определить период T_0 крутильных колебаний эталонного тела с известным моментом инерции J_{z_0} так, что c можно определить по равенству, получаемому из уравнения (2.17):

$$c = \frac{J_{z_0} \cdot 4\pi^2}{T_0^2}; \quad (2.18)$$

в) подставив данное значение в (2.17), предварительно возведенное в квадрат, после соответствующих преобразований получим:

$$J_z = \frac{cT^2}{4\pi^2} = J_{z_0} \cdot \frac{T^2}{T_0^2}. \quad (2.19)$$

Данная формула дает искомый момент инерции.

2.4. Определение момента инерции методом бифилярного подвеса

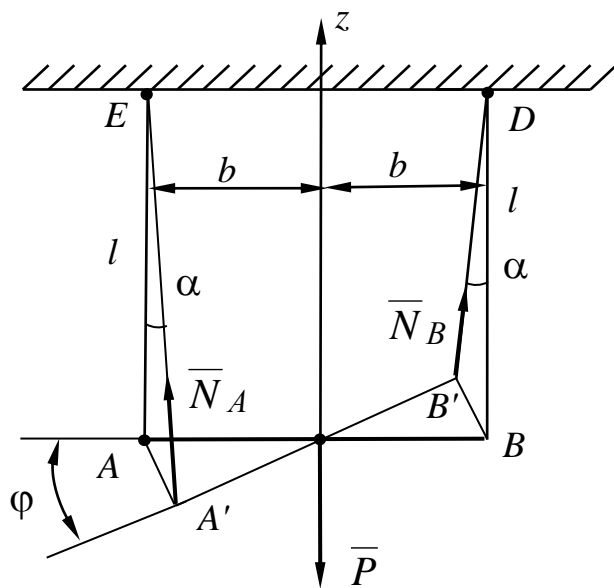


Рис. 2.6

Тело, момент инерции которого требуется определить, подвесим на двух нитях одинаковой длины так, чтобы центр тяжести тела располагался ровно посередине между нитями (рис. 2.6).

Расстояние между ними равно $2b$, l — длина нитей. Требуется определить J_z — момент инерции тела относительно оси Cz .

Повернем тело на малый угол φ относительно вертикальной оси Cz так, чтобы центр тяжести остался на данной оси. Тогда нити повернутся

на малый угол α . Если тело отпустить, то оно будет совершать свободные колебания, вращаясь вокруг оси Cz под действием восстанавливающих сил реакции натянутых нитей. На рис. 2.6 показано:

AB – положение равновесия тела;

$A'B'$ – промежуточное положение тела в текущий момент времени, когда тело повернуто на угол φ и нити отклонены на угол α .

Момент восстанавливающих сил \bar{N} в данном положении относительно оси Cz равен:

$$M_z = -2Nb \sin \alpha \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения (1.11):

$$J_z \cdot \ddot{\varphi} = -2Nb \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (2.20)$$

Учитывая малость углов α и φ , с большой степенью точности можно утверждать, что

$$2N = P; \quad \sin \alpha = \alpha; \quad \cos \frac{\varphi}{2} = 1; \quad \sin \varphi = \varphi.$$

Кроме того, из $\Delta BB'D$ и $\Delta KBB'$ находим, что $BB' = l\alpha$ и $BB' = b\varphi$, приравнявая, имеем $\alpha = \frac{b\varphi}{l}$.

Подставим все эти соотношения в (2.20) и перенесем все члены в левую сторону

$$J_z \ddot{\varphi} + \frac{Pb^2}{l} \cdot \varphi = 0. \quad (2.21)$$

Данное уравнение имеет вид свободных гармонических колебаний при значении $k^2 = \frac{Pb^2}{J_z l}$. Квадрат периода колебаний равен:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{4\pi l J_z}{Pb^2},$$

Откуда

$$J_z = \frac{Pb^2}{4\pi^2 l} \cdot T^2. \quad (2.22)$$

На основе данного уравнения можно определить момент инерции тела J_z относительно центральной оси Cz : для этого тело необходимо подвесить так, как это показано на рис. 2.6 и с помощью секундомера определить период свободных колебаний T , далее воспользоваться формулой (2.22).

3. Методика проведения опытов

3.1. Определение момента инерции шатуна. Момент инерции шатуна двигателя внутреннего сгорания относительно центральной оси определяется двумя способами, как это показано в главе «Экспериментальное определение момента инерции». После подвески шатуна определить период свободных колебаний, вычислив его как среднее значение по трем замерам времени 50 полных колебаний.

При первом способе подвесить шатун на ось малым отверстием, определить период колебаний и по (2.8) и (2.9) определить J_{Cz} . При втором способе необходимо знать период колебаний относительно двух осей, проходящих внутри обоих отверстий. При этом относительно оси, проходящей внутри малого отверстия, период уже определен. Совершенно аналогично определить период колебаний относительно оси, проходящей внутри большого отверстия. Зная T_1 и T_2 , по формулам (2.15) определить, решив данную систему, J_{Cz} . Сравнить момент инерции J_{Cz} , найденный двумя способами. Все результаты свести в табл. 2. Дополнительные данные:

$P = \dots$ – вес шатуна;

$a_1 = AC = \dots$

3.2. Определение момента инерции трехкулачкового патрона. Определение момента инерции трехкулачкового патрона производится двумя способами.

Способ 1. Определение с помощью крутильных колебаний, как это описано выше. Период крутильных колебаний определить как среднее значение по 2-м замерам 50 полных колебаний. Все результаты свести в табл. 3.

Дополнительные данные:

$C = \dots$

Способ 2. Определение момента инерции методом бифилярного подвеса. Период колебаний определить аналогично способу 1. Результаты свести в табл. 3.

Дополнительные данные:

$$P = \dots$$

$$b = \dots$$

$$l = \dots$$

Таблица 2

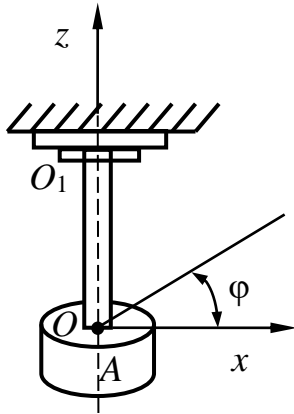
Способ 1	№ опыта	50 T	T	T _{cp}	J _Z	J _{Cz}
	1					
	2					
	3					
Способ 2	№ опыта	50 T	T	T _{cp}		J _{Cz}
	1					
	2					
	3					

Таблица 3

Способ 1	№ опыта	50 T	T	T _{cp}	J _{Cz}
	1				
	2				
Способ 2	№ опыта	50 T	T	T _{cp}	J _{Cz}
	1				
	2				

4. Контрольные задачи

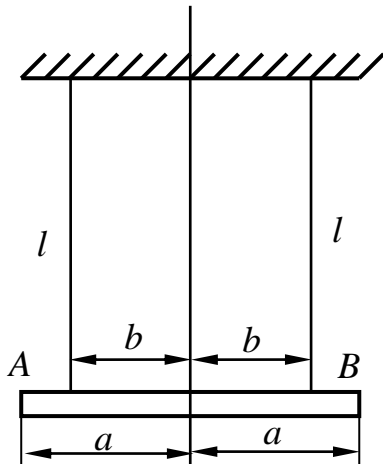
1. Упругую проволоку, на которую подвешен однородный шар радиусом r и массой M , закручивают на угол φ_0 , а затем предоставляют ей свободно раскручиваться. Момент пары, необходимой для закручивания проволоки на один радиан, равен C . Определить движение, пренебрегая сопротивлением воздуха и считая момент силы упругости закрученной проволоки пропорциональным углу кручения φ . Указать также период крутильных колебаний шара.



2. Для определения момента инерции J_z тела A относительно оси Oz его прикрепили к упругому вертикальному стержню OO_1 , закрутили этот стержень, повернув тело A вокруг оси Oz на малый угол φ_0 и пустили колебаться. Продолжительность 100 размахов оказалась равной $100T = 2$ мин, где T – половина периода. Колебания были гармонические, так как момент силы упругости стержня пропорционален углу закручивания и равен $c\varphi$. Для определения

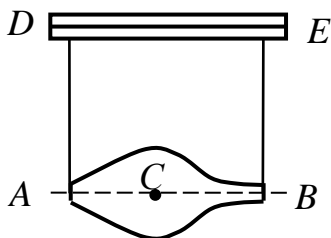
коэффициента c проделали второй опыт: на стержень в точке O был надет однородный круглый диск радиусом $r = 15$ см, весом $P = 1,6$ кг, и тогда продолжительность одного размаха оказалась равной $T_1 = 1,5$ сек. Определить момент инерции тела J_z .

3. Бифилярный подвес состоит из однородного стержня AB длиной $2a$, подвешенного горизонтально посредством двух вертикальных нитей длиной l , отстоящих друг от друга на расстоянии



$2b$. Определить период крутильных колебаний стержня, полагая, что стержень в течение всего времени движения остается в горизонтальном положении и натяжение каждой из нитей равно половине веса стержня.

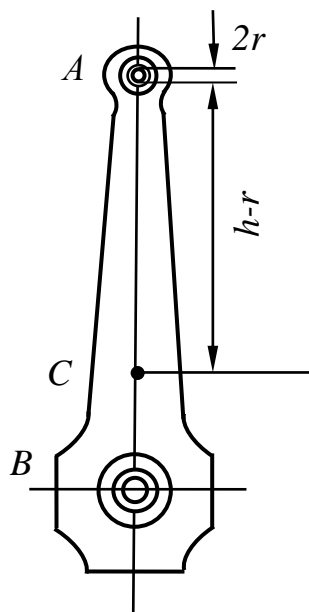
При определении горизонтальной составляющей натяжения каждой из нитей, считая колебания бифиляра малыми, заменить синус угла между направлением нити и вертикалью самим углом.



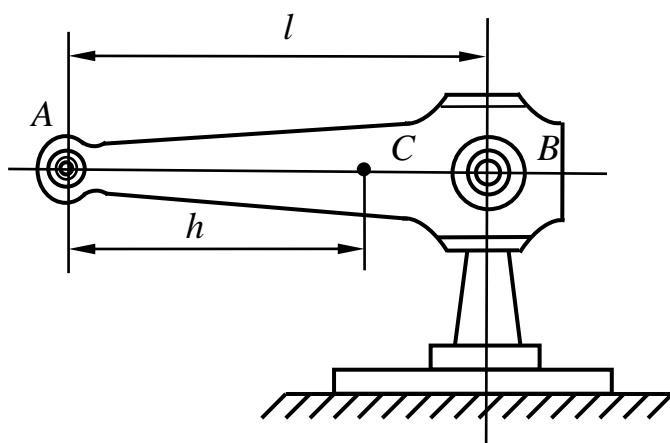
4. Для определения момента инерции J данного тела относительно оси AB , проходящей через центр тяжести тела, его подвесили жестко скрепленными с ним стержнями AD и BE , свободно насаженными на неподвижную горизонтальную ось DE , так, что ось AB параллельна DE . Приведя затем тело в

колебательное движение, определили продолжительность T одного размаха.

Как велик момент инерции J , если вес тела P и расстояние между осями AB и DE равно h . Массами стержней пренебрегаем.



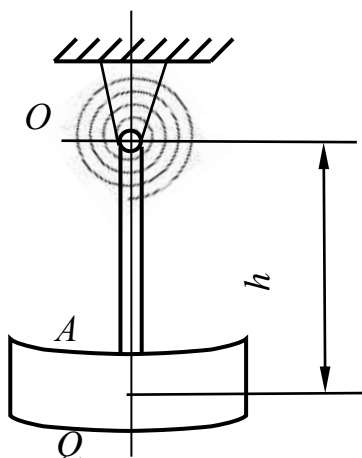
5. Для определения момента инерции шатуна его заставляют качаться вокруг горизонтальной оси, продев через втулку цапфы крейцкопфа тонкий цилиндрический стержень. Продолжительность размахов $1000T = 100$ сек., где T – половина периода. Затем для определения расстояния $AC = h$ центра тяжести C от центра A отверстия шатун положили горизонтально, подвесив его в точке A и оперев точкой B на платформу напольных весов. Давление на нее оказалось при этом равным $P = 50$ кг.



Определить центральный момент инерции J шатуна относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, имея следующие данные: вес шатуна $Q = 80$ кг, расстояние между вертикалями, проведенными через точки A и B , равно $l = 1$ м, радиус цапфы крейцкопфа $r = 4$ см.

6. В сейсмографах – приборах для определения и регистрации землетрясений – применяется физический маятник, ось привеса которого образует угол α с вертикалью. Расстояние от оси привеса до центра тяжести маятника равно α , момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси привеса, равен J_C , вес маятника равен P . Определить период колебаний маятника. Описать, как можно с помощью наклонного

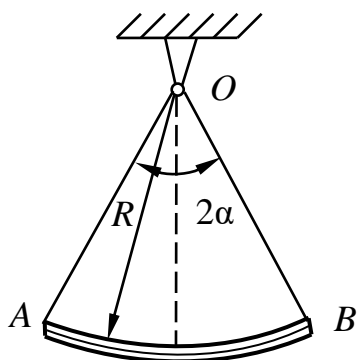
маятника определить момент инерции маятника относительно центральной оси, параллельной оси привеса.



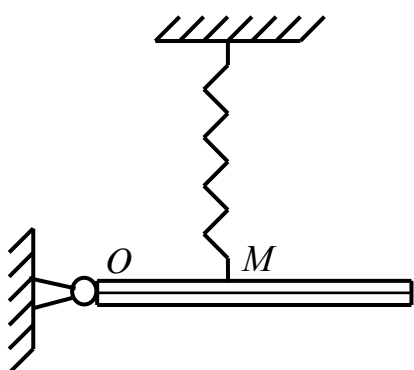
7. В вибрографе для записи горизонтальных колебаний фундаментов машин маятник OA , состоящий из рычага с грузом на конце, может качаться вокруг своей оси O , удерживаясь в вертикальном положении устойчивого равновесия собственным весом и спиральной пружиной.

Определить момент инерции маятника относительно оси вращения, если маятнику сообщили малые колебания, при этом определили период колебаний $T = 0,5$ сек.

Максимальный статический момент веса маятника относительно оси вращения $Qh = 4,5$ кгсм. Коэффициент жесткости пружины, сопротивление которой пропорционально углу закручивания равен $C = 0,1$ кгсм. При равновесном положении маятниковая пружина не напряжена.

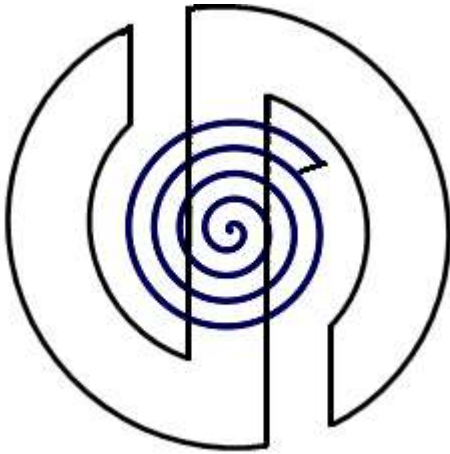


8. Тонкий стержень, изогнутый по дуге окружности радиусом R , подвешен на нитях так, что он может колебаться в своей плоскости вокруг горизонтальной оси, совпадающей с центром окружности. Определить период малых колебаний стержня, если $\angle AOB = 2\alpha$.



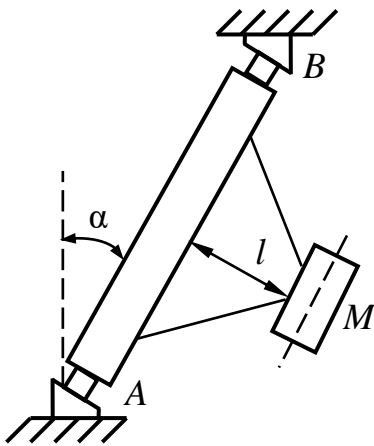
9. В сейсмографе однородный стержень весом P удерживается в горизонтальном положении при помощи вертикальной пружины с жесткостью C , прикрепленной в точке M к стержню на расстоянии $OM = a$.

Определить период собственных колебаний стержня в вертикальной плоскости, если его длина равна l .



10. Для регулирования хода часов применяются часовые балансиры. Балансир A может вращаться вокруг перпендикулярной к его плоскости оси, проходящей через центр тяжести O , имея относительно этой оси момент инерции J . Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов.

При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан равен C .

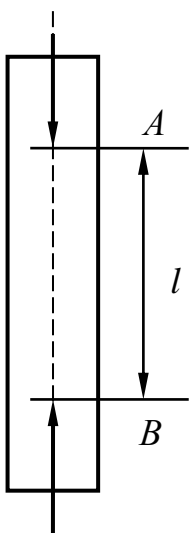


11. В горизонтальном сейсмографе ось AB составляет весьма малый угол α с вертикалью. Вес груза M , отстоящего от оси вращений на расстоянии l , равен P .

Определить период малых собственных колебаний сейсмографа. Весом стержней пренебречь. Можно ли с помощью данного маятника определить ускорение свободного падения g ? Если да, то, что нужно для этого сделать?

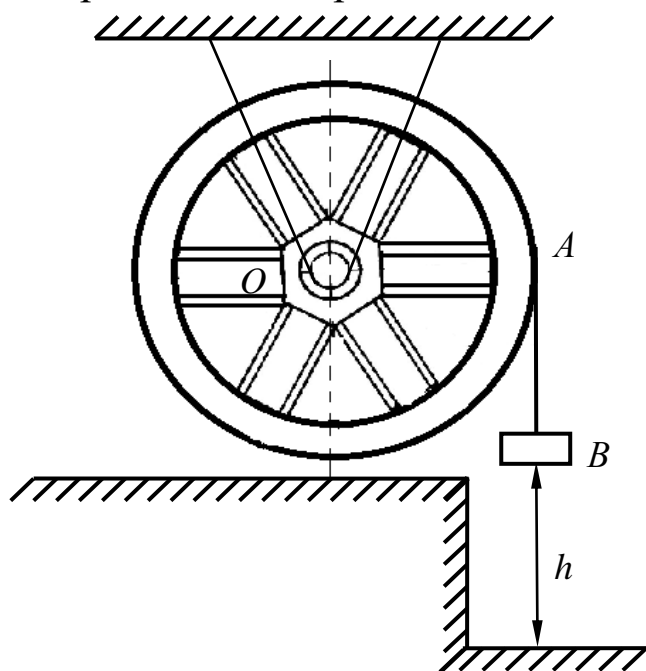
12. Однородный стержень длиной $2l$ может колебаться в вертикальной плоскости около одной из своих точек, как физический маятник.

Найти, где должна быть расположена точка подвеса, чтобы период колебаний был наименьшим.



13. Для определения ускорения силы тяжести пользуются обратным маятником, который представляет собой стержень, снабженный двумя трехгранными ножами A и B . Один из ножей неподвижен, а второй может перемещаться вдоль стержня. Подвешивая стержень то на один, то на другой нож и меняя расстояние AB между ними, можно добиться равенства периодов качаний маятника вокруг каждого из ножей.

Чему равно ускорение силы тяжести, если расстояние между ножами, при котором периоды качаний маятника равны $AB = l$, а период качания равен T ?

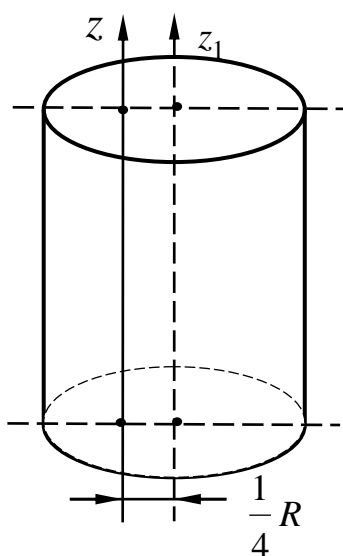


14. Для определения момента инерции J махового колеса A радиусом $R = 50$ см относительно оси, проходящей через центр тяжести, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирию B весом $P_1 = 8$ кг и наблюдали продолжительность $T_1 = 16$ сек опускания гири с высоты $h = 2$ м. Для исключения трения в подшипниках проделали второй опыт с гирей весом $P_2 = 4$ кг, причем продолжительность

опускания оказалась равной $T_2 = 25$ сек при прежней высоте. Предполагая момент силы трения постоянным и не зависящим от веса гири, вычислить момент инерции J .

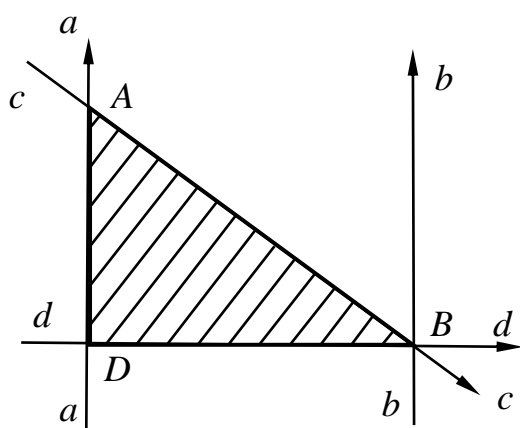
15. Для определения момента инерции J_z тела A относительно вертикальной оси Oz его привязывают к упругому вертикальному стержню OO_1 , закручивают этот стержень, повернув тело A вокруг оси Oz , на малый угол φ_0 и пускают колебаться. Продолжительность периода колебаний тела оказалась равной T_1 (см. рис. к задаче 2). Колебания были гармонические, так как момент силы упругости стержня пропорционален углу закручивания и равен $c\varphi$. Для определения коэффициента c второй опыт проделали следующим образом: однородный круглый диск весом P и радиусом r прикрепили к телу, момент инерции которого требуется определить.

5. Контрольные вопросы



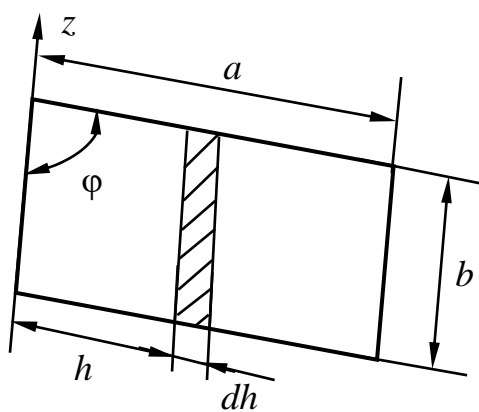
1. Укажите верно записанное значение момента инерции для однородного цилиндра радиусом R , массой M относительно оси z , отстоящей от геометрической оси z_1 на расстоянии $1/4R$:

- а) $\frac{7}{16}MR^2$; б) $\frac{17}{16}MR^2$;
 в) $\frac{5}{16}MR^2$; г) $\frac{11}{16}MR^2$.



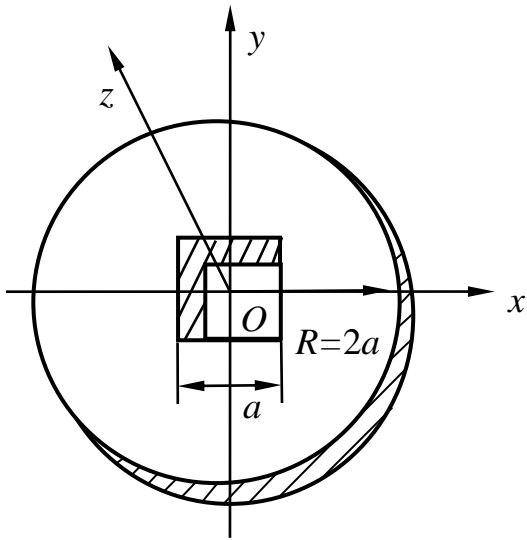
2. Пользуясь только определением момента инерции относительно оси, укажите, относительно какой оси для площади однородного треугольника ABD момент инерции является максимальным:

- а) aa ; б) bb ;
 в) cc ; г) dd .



3. Пользуясь методами интегрального исчисления, укажите правильно записанный момент инерции для параллелограмма со сторонами a , b относительно оси, как это показано на рисунке. Масса площади параллелограмма равна M :

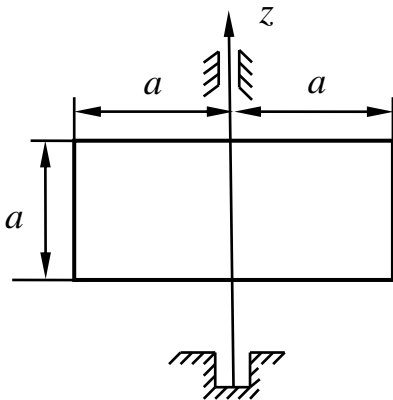
- а) $\frac{1}{3}Ma^2 \sin^2 \varphi$; б) $\frac{1}{12}Ma^2 \cos^2 \varphi$;
 в) $\frac{1}{12}Ma^2 \sin^2 \varphi$; г) $\frac{Ma^2}{3 \sin^2 \varphi}$.



4. В однородной тонкой круглой пластинке радиусом $2a$ и массой M сделан квадратный вырез со стороной квадрата a . Геометрические центры квадрата и круга совпадают.

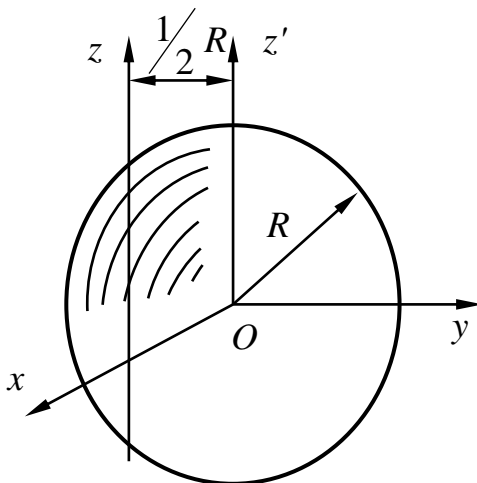
Укажите правильно записанный момент инерции круга с данным вырезом относительно оси z , проведенной через геометрический центр и перпендикулярной площади фигуры:

- а) $\frac{(32\pi - 1)}{24\pi} Ma^2$; б) $\frac{(16\pi - 1)}{12\pi} Ma^2$;
 в) $\frac{(48\pi - 1)}{24\pi} Ma^2$; г) $\frac{(32\pi - 1)}{16\pi} Ma^2$.



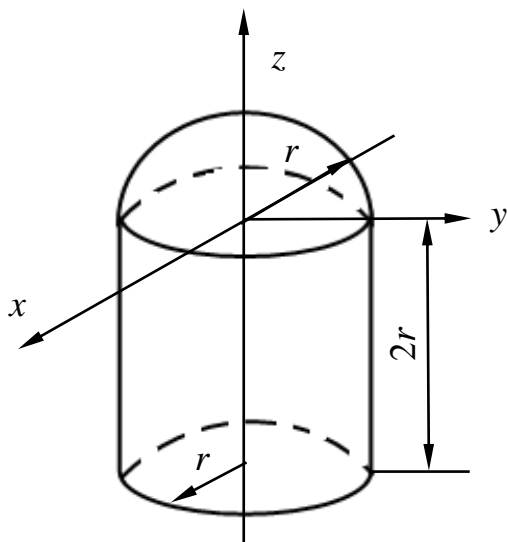
5. Прямоугольная рамка массой M вращается вокруг оси z , как это показано на рисунке. Пренебрегая толщиной стержней и считая их однородными, указать какой момент инерции записан верно относительно оси Oz :

- а) $\frac{4Ma^2}{3}$; б) $\frac{5Ma^2}{12}$;
 в) $\frac{4Ma^2}{9}$; г) $\frac{5Ma^2}{9}$.



6. Укажите верно записанное значение момента инерции для однородного сплошного шара относительно оси, отстоящей от геометрической (центральной) оси на расстоянии $1/2R$.

- а) $\frac{11}{20} MR^2$; б) $\frac{7}{10} MR^2$;
 в) $\frac{13}{20} MR^2$; г) $\frac{9}{20} MR^2$.



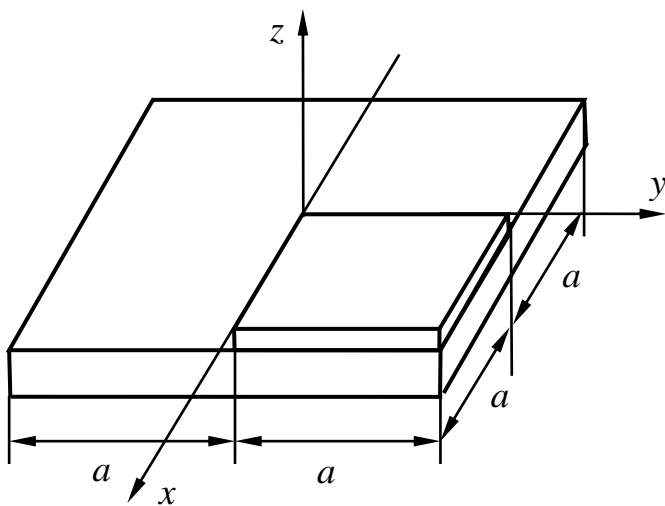
7. На цилиндр, имеющий массу M , наложен полушар также с массой M . Геометрические размеры цилиндра и полушара указаны на рисунке.

Укажите верно записанный момент инерции относительно оси x или y . Расположение осей координат показано на рисунке.

- а) $\frac{35}{60}Mr^2$; б) $\frac{71}{30}Mr^2$;
 в) $\frac{97}{60}Mr^2$; г) $\frac{31}{60}Mr^2$.

8. В какой системе единиц допущена ошибка в определении размерности момента инерции:

- а) МКГСС; $\text{кгмсек}^2 = 1 \text{ т.е.м. м}^2$; б) СИ; кгм^2 ;
 в) СГС; $\text{гсм}^2 = \text{см}^2 \text{ сек дин}$; г) Система: сила – г
 длина – см гсмсек^2 .
 время – сек



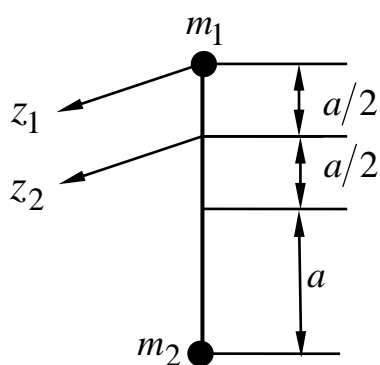
9. На прямоугольную квадратную пластинку со стороной $2a$ наложена квадратная пластинка со стороной a . массы пластинок равны $4M$ и M .

Указать правильно записанный момент инерции относительно оси z , проходящей через геометрический центр большей пластинки, как это показано на рисунке.

- а) $\frac{10Ma^2}{3}$; б) $\frac{5Ma^2}{3}$; в) $3Ma$; г) $\frac{8Ma^2}{3}$.

10. В каком из указанных четырех случаев период колебаний относительно оси z записан неверно?

Случай 1 и 2

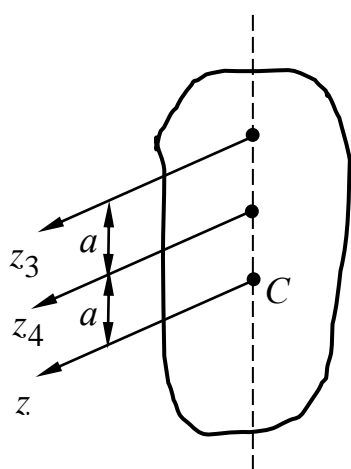


Две точечные массы соединены невесомым стержнем ($M_1 = M_2$)

а) ось z_1 $T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$;

б) ось z_2 $T = 2\pi\sqrt{\frac{5a}{2g}}$.

Случай 3 и 4



Момент инерции относительно оси z , проходящей через центр тяжести, равен J_z масса тела M .

в) ось z_3 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z + 2Ma^2}{Mga}}$;

г) ось z_4 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z + Ma^2}{Mga}}$.

3.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8 (КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ)

Тема: Экспериментальные методы определения моментов инерции тел сложной формы.

Введение. Осевые моменты инерции тел относятся к основным характеристикам распределения масс роторов. Они являются мерой инертности тел при вращательном движении. Вопрос о точности их определения является весьма актуальным при проектировании и создании различных машин и механизмов. Так как вращающиеся тела часто имеют очень сложную форму, то экспериментальные методы определения моментов инерции в этих случаях бывают более эффективными по сравнению с теоретическим расчетом.

1. Цель и задачи проведения лабораторной работы

1.1. Цель выполнения работы – изучение и освоение методики определения моментов инерции тел сложной формы методом физического маятника.

1.2. Задача выполнения работы – изучить экспериментальный метод определения моментов инерции для тел сложной формы.

2. Краткие теоретические сведения

Осевым моментом инерции тела относительно оси z называется величина, равная сумме произведений масс точек тела на квадрат расстояния от этих точек до данной оси:

$$J_{zz} = \sum m_v h_v^2,$$

здесь $v = 1, 2, \dots, n$; n – количество точек, составляющих тело.

Для определения моментов инерции существуют два принципиально различных подхода – аналитический и экспериментальный. Аналитически точно определить осевой момент инерции можно только для тел простой формы, поверхность которых описывается математическими зависимостями. Например, для однородного стержня относительно оси, проведенной через его конец, он равен:

$$J_{zz} = \frac{1}{3}ML^2, \quad (2.1)$$

где M – масса стержня; L – его длина.

Для тел сложной формы применение аналитических методов связано с приближенным описанием геометрии тел и для получения требуемой точности эти методы представляют собой достаточно трудоемкую задачу. Поэтому в таких случаях применяются экспериментальные методы. В описываемом методе применяется метод физического маятника.

Физическим маятником называется тело, совершающее колебания относительно оси вращения под действием силы тяжести. В частности, шатун, подвешенный одной из втулок на ось (рис. 2.1).

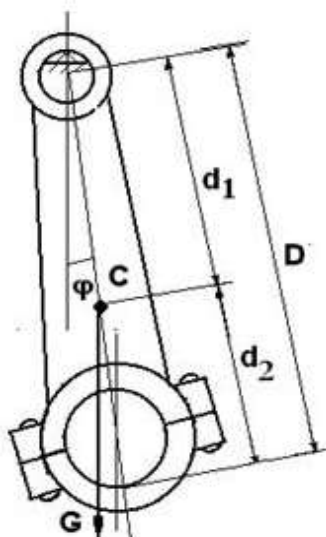


Рис. 2.1. Шатун, подвешенный одной из втулок на ось

Момент инерции тела относительно оси вращения является мерой инерции этого тела во вращательном движении вокруг оси. Отсюда следует принципиальная возможность определять момент инерции физического маятника по периоду его колебаний: чем больше момент инерции, тем больше период колебаний. Однако период колебаний зависит еще и от положения центра тяжести. Например, если центр тяжести физического маятника находится на оси вращения, то период колебаний становится бесконечно большим, так как колебания не возникают. Это наблюдается, например, в случае хорошо сбалансированного колеса.

Повернем тело (рис. 2.1) вокруг оси на небольшой угол и отпустим его без начальной скорости. Пренебрегая трением в оси и сопротивлением воздуха в виду их малости, запишем дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -Mgd_1 \sin \varphi, \quad (2.2)$$

где J_{zz} – момент инерции тела относительно оси подвеса; M – масса тела; g – ускорение свободного падения; d_1 – расстояние между осью подвеса и центром масс; φ – угол поворота.

Далее, учитывая, что угол φ мал и $\sin \varphi \approx \varphi$, дифференциальное уравнение (2.2) приведем к следующему каноническому виду:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является дифференциальным уравнением свободных колебаний с круговой (циклической) частотой свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{Mgd_1}{J_{zz}}}.$$

Для дальнейших рассуждений удобно перейти от круговой частоты к периоду колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{zz}}{Mgd_1}}, \quad (2.4)$$

где T – продолжительность одного колебания, т.е. период колебаний, он весьма просто определяется экспериментально.

Таким образом, зная период колебаний, можно из формулы (2.4) вычислить момент инерции тела относительно оси подвеса:

$$J_{zz} = \frac{T^2}{4\pi^2} Mgd_1. \quad (2.5)$$

Но формулу (2.5) можно использовать только в том случае, если известно положение центра тяжести тела, т.е. расстояние от оси подвеса до центра масс тела. Момент инерции тела относительно центральной оси, т.е. оси проходящей через центр масс параллельно оси подвеса, можно вычислить по теореме Штейнера–Гюйгенса:

$$J_{Cz} = J_{zz} - Md_1^2, \quad (2.6)$$

где d_1 – расстояние между осями.

Если положение центра масс не известно, то применяют так называемый метод двойного подвеса. Таким образом, для определения расстояний d_1 и d_2 тело подвешивают сначала одной втулкой, а затем другой, и каждый раз экспериментально измеряют периоды качаний с малой амплитудой. Используя формулы (2.5) и (2.6), получим систему уравнений:

$$J_{Cz} = \frac{T_1^2}{4\pi^2} Mgd_1 - Md_1^2;$$

$$J_{Cz} = \frac{T_2^2}{4\pi^2} Mgd_2 - Md_2^2 ;$$

$$D = d_1 + d_2,$$

где D – расстояние между осями подвесов.

Приравнивая правые части первых двух уравнений, и используя третье уравнение для замены расстояний от центра масс до осей подвеса, получим:

$$d_1 = \frac{D(gT_2^2 - 4\pi^2 D)}{g(T_1^2 + T_2^2) - 8\pi^2 D}, \quad d_2 = \frac{D(gT_1^2 - 4\pi^2 D)}{g(T_1^2 + T_2^2) - 8\pi^2 D} .$$

С достаточной степенью точности можно приравнять численные значения $g=9,8$ и $\pi^2 = 9,87$. Сокращая два последних уравнения на величину $g \approx \pi^2$, получим следующие приближенные расчетные формулы:

$$d_1 = \frac{D(T_2^2 - 4D)}{T_1^2 + T_2^2 - 8D}, \quad d_2 = \frac{D(T_1^2 - 4D)}{T_1^2 + T_2^2 - 8D} . \quad (2.7)$$

Экспериментально определив периоды малых качаний относительно параллельных осей и измерив расстояния между осями, по формулам (2.7) вычисляют расстояния от центра масс до осей подвеса. По этим найденным расстояниям вычисляют осевые моменты инерции по формуле (2.5) и момент инерции относительно центральной оси по формуле (2.6).

Экспериментально можно определить момент инерции физического маятника относительно оси подвеса, не измеряя период его колебаний, а подобрав к этому физическому маятнику синхронный математический маятник (рис. 2.2).

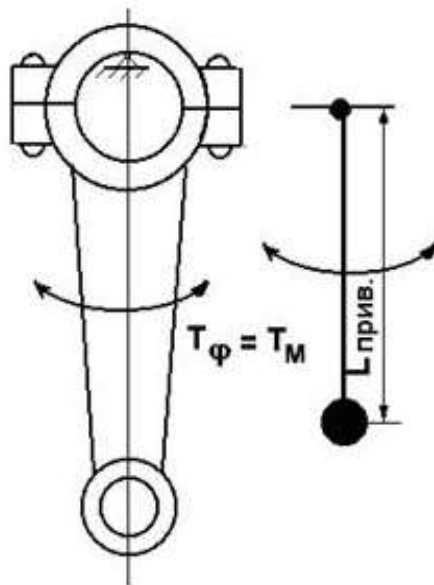


Рис. 2.2. Синхронный математический маятник

Длина такого синхронного математического маятника называется приведенной длиной данного физического маятника. Период колебаний синхронного математического маятника определяется по формуле

$$T = \sqrt{\frac{L_{\text{прив}}}{g}} .$$

Тогда, с учетом формулы (2.4) получается следующая расчетная формула для момента инерции тела сложной формы:

$$J_{zz} = Md_1L_{\text{прив}} . \quad (2.8)$$

Расстояние от оси подвеса до центра масс тела можно определить опытным путем, уравновесивая тело в горизонтальном положении (рис. 2.3).

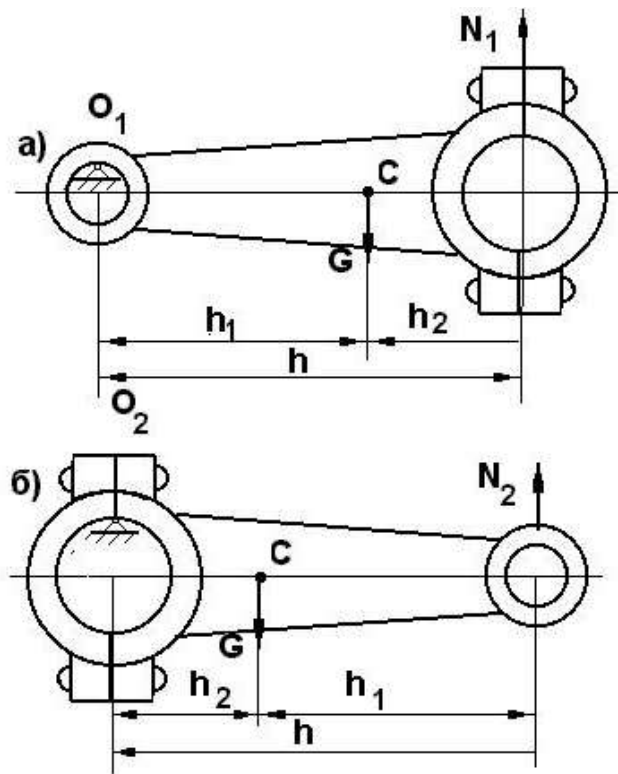


Рис. 2.3. Горизонтальное положение

Уравнения статического равновесия тела имеют вид

$$N_k \cdot h - Gh_k = 0,$$

откуда:

$$h_k = \frac{N_k h}{G}, \quad (2.9)$$

где h_k – плечо силы тяжести тела относительно оси подвеса в горизонтальном положении за одну из втулок; h – расстояние между центрами втулок; G – сила тяжести шатуна; N_k – сила натяжения нити, удерживающей шатун в горизонтальном положении за другую втулку; $k = 1; 2$ – номер втулки. Номером 1 обозначено все, что связано с малой втулкой, а номером 2 – все, что относится к большой.

Так как колебания шатуна будут наблюдаться в вертикальном его положении, то расстояние от центра тяжести до этих осей больше найденных по формуле (2.9) расстояний на радиусы втулок (см. рис. 2.1).

3. Лабораторная установка

Лабораторная установка состоит из вертикальной стойки, перпендикулярно которой крепится опора в виде призматического стержня, на которой устанавливаются исследуемые тела (рис. 3.1).

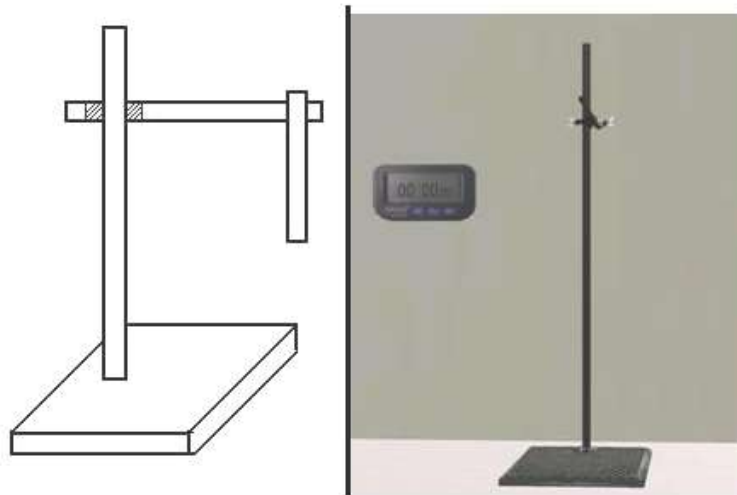


Рис. 3.1. Лабораторная установка

В комплект установки входят два набора тел: однородные сплошные стержни, принимаемые за эталонные тела (рис. 3.2, а), и экспериментальные образцы сложной формы (рис. 3.2, б), а также нить с грузом, способным перемещаться вдоль нее (рис. 3.2, в).

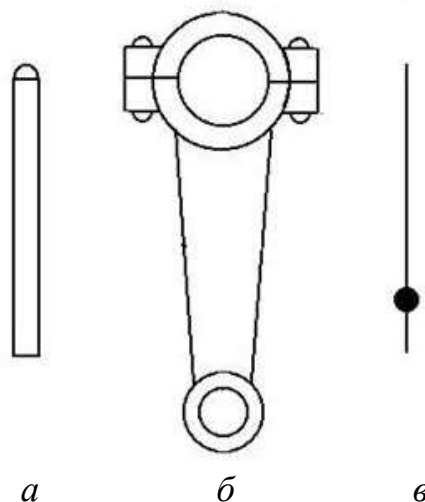


Рис. 3.2. Наборы тел из комплекта установки

В комплект входят секундомер, весы, динамометр, штангенциркуль (рис. 3.3).

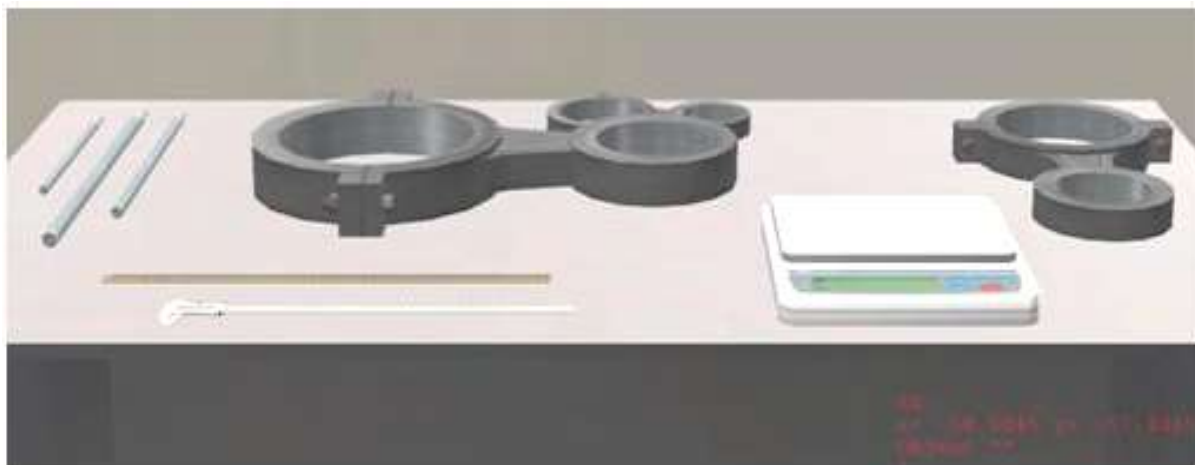


Рис. 3.3. Дополнительное оборудование

4. Активные клавиши клавиатуры и функции манипулятора

При выполнении лабораторной работы применяются следующие клавиши (рис. 4.1):

W, S, A, D – для перемещения в пространстве;

F2, E – аналоги средней клавиши манипулятора (при первом нажатии берется объект, при последующем – ставится);

F10 – выход из программы.



Рис. 4.1. Активные клавиши клавиатуры

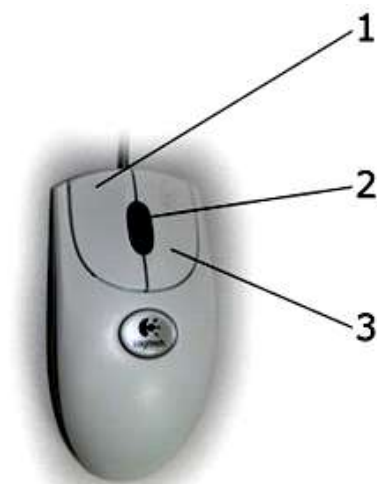


Рис. 4.2. Функции манипулятора

Левая клавиша мыши (1) – при нажатии и удерживании обрабатываются (поворачивается, переключается) тот или иной объект (рис. 4.2)

Средняя клавиша (2) – при первом нажатии (прокрутка не используется) берется объект, при последующем – ставится (прикрепляется).

Правая клавиша (3) – появляется курсор-указатель (при повторном – исчезает).

Примечание: При появившемся курсоре невозможно перевести взгляд вверх и стороны.

5. Порядок выполнения работы

5.1. Устанавливаем на опору одно из эталонных тел, отклоняем его на начальный угол и, задавшись числом полных колебаний (например, 10 колебаний), определяем период колебаний. Этот опыт надо повторить 3–5 раз и вычислить среднеарифметическое значение периода. По формуле (2.4) вычислим экспериментальное значение момента инерции.

5.2. Измеряем массу и длину тела и вычисляем теоретическое значение момента инерции по формуле (2.1). Данные заносятся в табл. 1.

5.3. Установим на опору одно из экспериментальных тел и дважды повторим опыт, меняя места крепления. Измеряем массу тела, расстояние между осями, по формуле (2.7) находим расстояния от опор до центра тяжести, по формуле (2.5) – экспериментальные

значения моментов инерции относительно осей подвеса, а по формуле (2.6) – значения моментов инерции относительно центра масс. Данные заносятся в табл. 2.

5.4. Прикрепляем нить с грузом, придаем ей колебательное движение, измеряем период колебаний, затем изменяя расстояние от груза до крепления, подбираем такую длину, при которой период колебаний будет равен периоду колебаний экспериментального тела относительно одной из втулок. Аналогичный опыт проводим, подбирая приведенную длину к периоду колебаний относительно другой втулки. Затем устанавливаем тело на горизонтальной поверхности, прикрепляем одну из втулок к динамометру и определяем опорные реакции. По формулам (2.9) и (2.8) вычисляем расстояние между осями подвеса и значение момента инерции. Данные заносятся в табл. 3.

6. Содержание и оформление отчета

6.1. Название работы.

6.2. Цель работы.

6.3. Технические данные установки.

6.4. Результаты измерений и вычислений, представленные в виде табл. 1, 2 и 3.

6.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Таблица 1

Результаты испытаний эталонного образца

№ измерения	Масса	Длина	Период	Эксперимент	Расчет	Погрешность
	M , кг	L , м	T , с	$J_{\text{э}}$, кг·м ²	$J_{\text{р}}$, кг·м ²	δ , %
1						
2						
3						
4						
5						
Среднее						

Таблица 2

Результаты испытаний экспериментального образца

№	Масса	Расст. между осями	Периоды колебаний		Расст. до центра масс		Моменты инерции		
	M , кг	D , м	T_1 , с	T_2 , с	d_1 , м	d_2 , м	J_{1z} , кг·м ²	J_{2z} , кг·м ²	J_{Cz} , кг·м ²
1									
2									
3									
4									
5									
Среднее									

Таблица 3

Результаты испытаний экспериментального образца

№	Масса	Реакция опор		Расстояние до центров тяжести		Приведенная длина		Моменты инерции по методу мат. маятника		
	M , кг	N_1 , Н	N_2 , Н	d_1 , м	d_2 , м	$L_{пр1}$, м	$L_{пр2}$, м	J_{1z} , кг·м ²	J_{2z} , кг·м ²	J_{Cz} , кг·м ²
1										
2										
3										
4										
5										
Среднее										

Контрольные вопросы

1. Что называется осевым моментом инерции?
2. Какие колебания называются крутильными?
3. Как находятся моменты инерции относительно параллельных осей?
4. Как связан период колебаний с моментом инерции тела?
5. Как находятся моменты инерции однородного стержня?
6. В каких единицах измеряются осевые моменты инерции?

3.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9 (КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ)

Тема: Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для определения момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

1. Цель и задачи лабораторной работы

1.1. **Цель выполнения работы** – экспериментальное определение момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

1.2. **Задачи выполнения работы:** 1) приобретение умений и навыков применения теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для определения момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; 2) приобретение практических навыков работы на лабораторной установке; 3) овладение методиками экспериментального исследования и обработки полученных результатов.

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Теорема об изменении кинетической энергии

Равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме, имеет вид

$$T - T_0 = A^i + A^e. \quad (2.1)$$

Здесь T_0 и T – значения кинетической энергии механической системы в начальном и конечном положениях, A^i – суммарная работа внутренних сил системы, A^e – суммарная работа внешних сил, приложенных к системе при ее переходе из начального положения в конечное.

Напомним, что единицей измерения кинетической энергии, как и работы силы, служит Джоуль (Дж), [Дж]=[Н·м].

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движение, вычисляется по формуле

$$T = \frac{MV^2}{2}, \quad (2.2)$$

где M – масса тела; V – его скорость.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , определяется формулой

$$T = \frac{J_{zz} \omega^2}{2}, \quad (2.3)$$

где J_{zz} – момент инерции тела относительно его оси вращения Oz , ω – его угловая скорость.

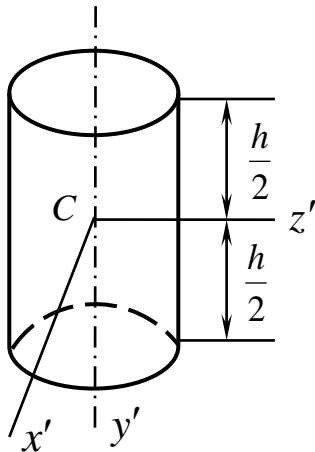


Рис. 2.1. Однородный круговой цилиндр

Моменты инерции однородного кругового цилиндра массы M , радиуса r и высоты h (рис. 2.1) относительно осей, проходящих через центр масс C цилиндра, даются формулами

$$J_{x'x'} = J_{z'z'} = \frac{M}{4} \left(r^2 + \frac{h^3}{3} \right), \quad (2.4)$$

$$J_{y'y'} = \frac{Mr^2}{2}.$$

Размерность моментов инерции [кгм²].

2.2. Теорема Штейнера-Гюйгенса

В курсе теоретической механики доказывается равенство, связывающее моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела C .

$$J_{zz} = J_{z'z'} + Md^2, \quad (2.5)$$

где z' – ось, проходящая через центр C масс тела; d – расстояние между параллельными осями z' и z , M – масса тела.

Равенство (2.5) – это теорема Штейнера-Гюйгенса: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Из равенства (2.5) видно, что $J_{zz} > J_{z'z'}$. Следовательно, из всех моментов инерции относительно осей данного направления наименьшим будет момент относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

2.3. Работа силы тяжести.

Из курса теоретической механики известно, что работа силы характеризует действие этой силы на перемещении ее точки приложения. Единица измерения работы – Джоуль (Дж).

Что касается силы тяжести, то также известно, что ее работа A_p равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля P силы тяжести на высоту H , на которую опускается или поднимается точка приложения этой силы:

$$A_p = \pm P \cdot H. \quad (2.6)$$

2.4. Момент силы, приложенный к твердому телу, оказывает вращательное действие на тело.

При повороте тела вокруг неподвижной оси под действием пары сил, характеризуемой моментом, момент силы совершает работу. Поскольку вращательное действие пары сил на тело полностью определяется моментом пары, то суммарную работу пары сил, ради краткости, называют работой момента.

В общем случае работа A_{M_0} момента M_0 определяется интегралом

$$A_{M_0} = \pm \int_0^{\varphi} M_0 d\varphi, \quad (2.7)$$

перед которым ставится знак плюс или минус. Здесь φ – угол поворота тела в радианах. Напомним, что знак плюс ставится перед интегралом (2.7), если момент M_0 и поворот тела на угол φ направлены в одну сторону, а знак минус – в противном случае.

Если момент M_0 пары сил не зависит от угла φ поворота тела, то есть $M_0 = const$, тогда работа момента определяется произведением

$$A_{M_0} = \pm M_0 \varphi, \quad (2.8)$$

перед которым также ставится знак плюс или минус.

2.5. В качестве примера применения приведенных выше формул рассмотрим движение механической системы, состоящей из прямолинейного стержня с двумя однородными круговыми цилиндрическими грузами, расположенными на вращающейся вокруг вертикальной оси рамке A и гири B , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок E с неподвижной осью

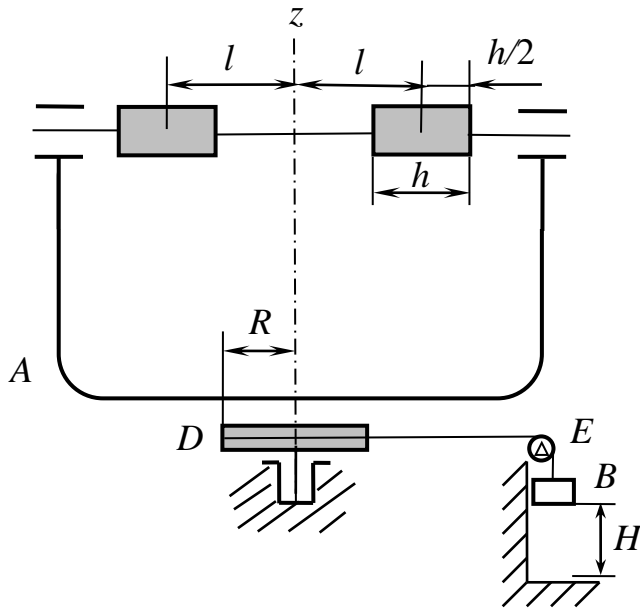


Рис. 2.2. Схема начального положения механизма

от центров тяжести цилиндрических грузов до оси z вращения рамки равны l ; радиус и высота цилиндрических грузов – r и h . Ставится задача – считая момент сил трения в опоре рамки с грузами

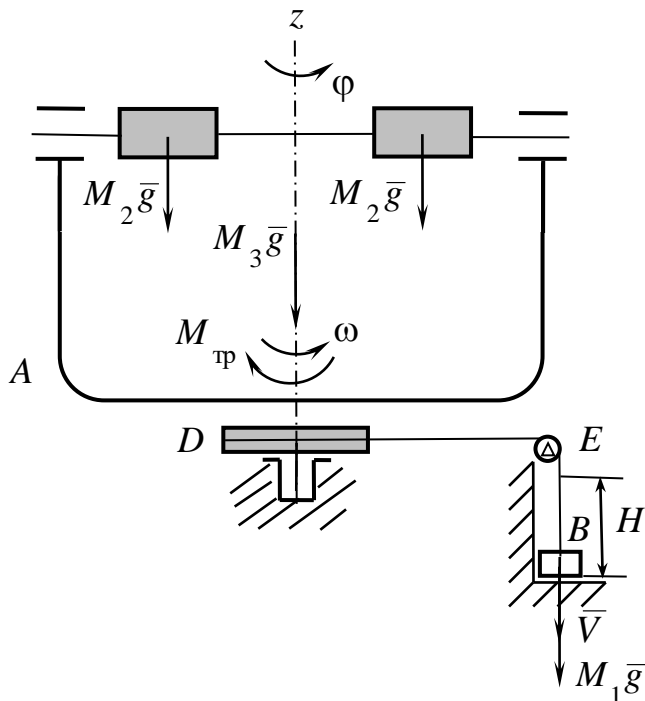


Рис. 2.3. Схема конечного положения механизма

вращения (рис. 2.2). Движение механизма начинается из состояния покоя. При этом продолжительность опускания гири B на высоту H равна t_1 . Если же рассматривать движение данной системы без двух цилиндрических грузов, то время опускания груза B на прежнюю высоту равно t_2 . Массы гири B и цилиндрических грузов равны соответственно M_1 и M_2 , радиус шкива D , жестко сидящего на оси вращения рамки, равен R , а расстояния

от их масс, постоянным и не зависящим от их массы, определить момент инерции J рамки и стержня без грузов.

Для решения поставленной задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме. С этой целью рассматриваемый механизм изображен в начальном (рис. 2.2) и конечном (рис. 2.3) положениях.

Поскольку данный механизм начинает движение из состояния покоя, то

$$T_0 = 0. \quad (2.9)$$

Тела, образующие механизм, являются абсолютно твердыми, а нить не растягивается, поэтому

$$A^i = 0. \quad (2.10)$$

Кинетическая энергия T механизма равна сумме кинетических энергий T_B гири B и T_A рамки A с грузами

$$T = T_B + T_A. \quad (2.11)$$

Гиря B движется поступательно со скоростью \bar{V} , поэтому по формуле (2.2)

$$T_B = \frac{M_1 V^2}{2}. \quad (2.12)$$

Рамка с грузами совершает вращательное движение, следовательно, по формуле (2.3) имеем

$$T_A = \frac{J_{zz} \omega^2}{2}, \quad (2.13)$$

где J_{zz} и ω – момент инерции и угловая скорость рамки с грузами.

Угловая скорость ω рамки с грузами и линейная скорость V гири B связаны кинематическим соотношением

$$\omega = \frac{V}{R}. \quad (2.14)$$

Момент инерции J_{zz} рамки с грузами определяем, пользуясь формулами (2.4) и (2.5). Имеем

$$J_{zz} = J + M_2 c^2 \quad (2.15)$$

где $c^2 = 2 \left[l^2 + \frac{1}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right) \right]$.

Подставляя соотношения (2.14) и (2.15) в формулу (2.13), получаем

$$T_A = \frac{(J + M_2 c^2) V^2}{2R^2}. \quad (2.16)$$

Таким образом, с учетом выражений (2.12) и (2.16) кинетическая энергия механизма запишется

$$T = \left(M_1 + \frac{J + M_2 c^2}{R^2} \right) \frac{V^2}{2}. \quad (2.17)$$

Суммарная работа A^e внешних сил, приложенных к механизму, складывается из работ силы тяжести гири B и постоянного момента $M_{\text{тр}}$ сил трения

$$A^e = A_{M_1g} + A_{M_{\text{тр}}} . \quad (2.18)$$

Работу силы тяжести M_1g гири B вычисляем по формуле (2.6)

$$A_{M_1g} = M_1g \cdot H . \quad (2.19)$$

Здесь g – гравитационное ускорение.

Работа постоянного момента $M_{\text{тр}}$ сил трения определяется формулой (2.8)

$$A_{M_{\text{тр}}} = -M_{\text{тр}}\varphi , \quad (2.20)$$

где $\varphi = \frac{H}{R}$ – угол поворота рамки с грузами при опускании гири B на высоту H .

С учетом равенств (2.19) и (2.20) выражение (2.18) принимает вид

$$A^e = \left(A_{M_1g} - \frac{M_{\text{тр}}}{R} \right) H . \quad (2.21)$$

Подставляя выражения (2.9), (2.10), (2.17) и (2.21) в равенство (2.1), получаем

$$\left(M_1 \frac{J + M_2c^2}{R^2} \right) \frac{V^2}{2} = \left(M_1g - \frac{M_{\text{тр}}}{R} \right) H . \quad (2.22)$$

Отсюда определяем квадрат модуля скорости гири

$$V^2 = \frac{2 \left(M_1g - \frac{M_{\text{тр}}}{R} \right) H}{M_1 + \frac{J + M_2c^2}{R^2}} . \quad (2.23)$$

Для определения ускорения a гири B продифференцируем по времени обе части выражения (2.22), предполагая, что скорость V и высота H опускания гири B является функциями времени t . Тогда

$$\left(M_1 + \frac{J + M_2 c^2}{R^2} \right) \frac{2V \frac{dV}{dt}}{2} = \left(M_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{R} \right) \frac{dH}{dt}.$$

Если учесть, что $\frac{dV}{dt} = a$ и $\frac{dH}{dt} = V$, то

$$a = \frac{M_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{R}}{M_1 + \frac{J + M_2 c^2}{R^2}} = \text{const}. \quad (2.24)$$

Таким образом, гиря B движется с постоянным ускорением a , поэтому в произвольный момент времени t имеет место уравнение $V = at$, откуда следует очевидное равенство

$$\frac{1}{t^2} = \frac{a^2}{V^2}. \quad (2.25)$$

Таким образом, при $t = t_1$ равенство (2.25) с учетом выражений (2.23) и (2.24) примет вид

$$\frac{1}{t_1^2} = \frac{M_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{R}}{2 \left(M_1 + \frac{J + M_2 c^2}{R^2} \right) \cdot H}. \quad (2.26)$$

Очевидно, что при отсутствии грузов на рамке в равенстве (2.26) следует положить $M_2 = 0$ и по условию задачи время t_1 заменить временем t_2 :

$$\frac{1}{t_2^2} = \frac{M_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{R}}{2 \left(M_1 + \frac{J}{R^2} \right) \cdot H}. \quad (2.27)$$

Разделив левую и правую части равенства (2.26) соответственно на левую и правую части равенства (2.27), после несложных преобразований получаем следующую формулу для определения момента инерции J рамки и стержня без грузов

$$J = \frac{M_2 c^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} - M_1 R^2. \quad (2.28)$$

3. Оборудование

3.1. Установка для изучения динамики вращательного движения ФДМ-006М.

3.2. Блок индикации временных интервалов.

4. Устройство и принцип работы установки

Схема установки для изучения динамики вращательного движения ФДМ 006М изображена на рис. 4.1.

Принцип работы установки основан на изменении частоты вращения рамки и стержня при различных положениях цилиндрических грузов относительно оси вращения.

Блок индикации предназначен для индикации временных интервалов прохождения грузом датчиков в процессе проведения лабораторных работ и управления электромагнитом.

Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из собственно установки 3 и блока индикации 12.

Установка включает в себя опору 1 с регулировочными винтами 2, стержень с грузами 4, расположенными на вращающейся рамке 5, электромагнит 6, шкалу 7, фотодатчики 8, ускоряющий груз 11, подвешенный на нити 10, перекинутой через блок 9 и намотанной на шкив 13.

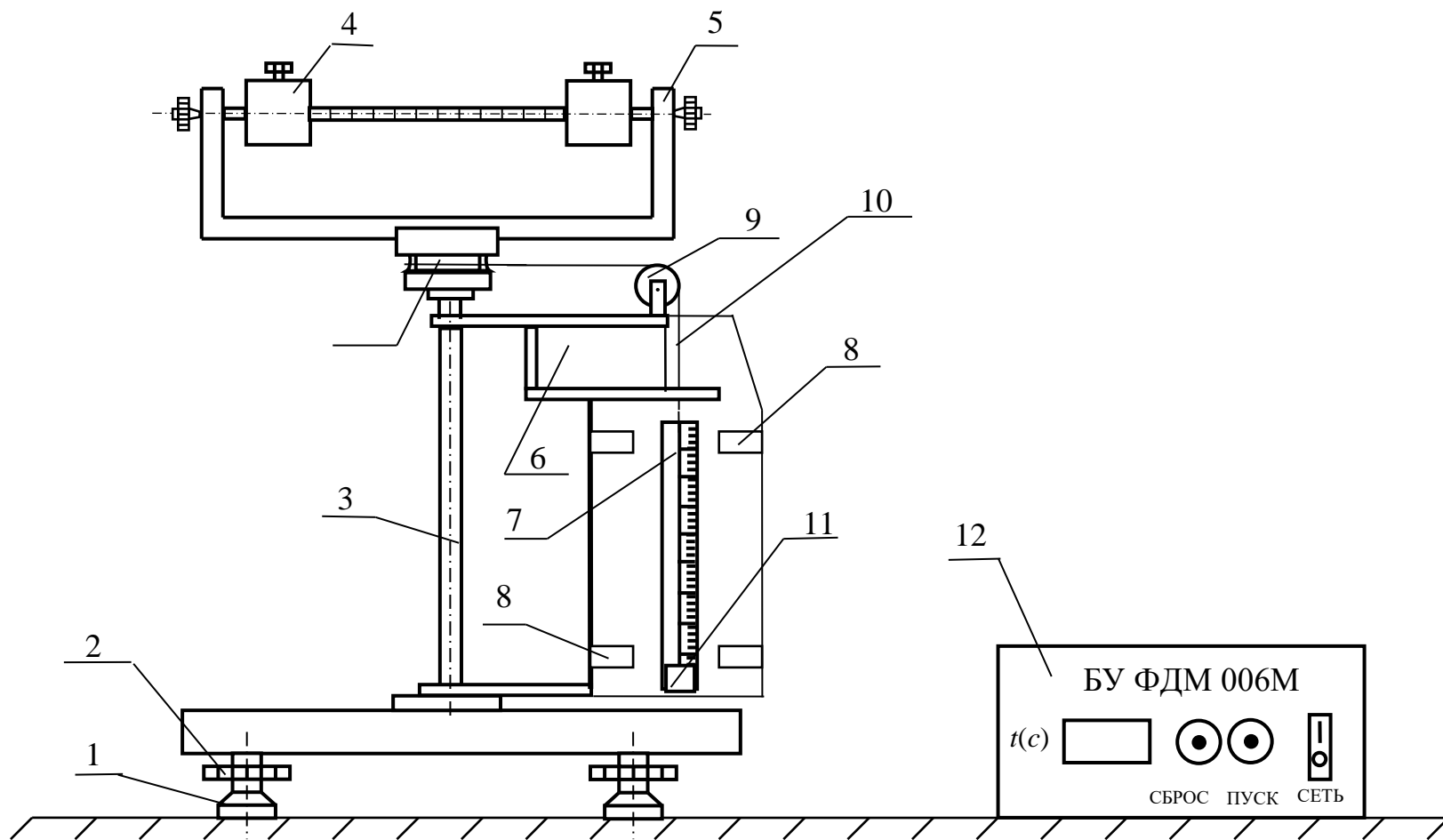


Рис. 4.1. Схема установки для изучения динамики вращательного движения ФДМ 006М:
 1 – опора; 2 – регулировочные винты; 3 – установка; 4 – цилиндрические грузы; 5 – рамка и стержень;
 6 – электромагнит; 7 – шкала; 8 – фотодатчики; 9 – блок; 10 – нить; 11 – ускоряющий груз; 12 – блок индикации;
 13 – шкив, жестко сидящий на оси вращения рамки

5. Указания мер безопасности

5.1. К работе с установкой допускаются лица, ознакомленные с ее устройством, принципом действия, а также разделом 6 настоящей лабораторной работы.

5.2. Работы, связанные с подготовкой установки к эксплуатации, ее обслуживанием, производить, не подключая блок индикации к питающей сети.

5.3. Перед началом работы с установкой необходимо убедиться, что блок индикации заземлен.

5.4. После проведения работы с установкой необходимо отключить блок индикации от сети.

6. Подготовка и порядок проведения лабораторной работы

6.1. Расположить установку на столе. С помощью регулировочных винтов 2 опоры 1 добиться, чтобы нить 10 подвеса ускоряющего груза 11, перекинутая через блок 9, находилась симметрично относительно корпусов оптоэлектронных датчиков, а ускоряющий груз не касался их при движении.

Числовые значения основных параметров установки следующие. $M_1 = 0,238$ кг и $H = 0,3$ м – масса и высота опускания ускоряющего груза 11; $M_2 = 0,81$ кг, $r = 0,024$ м и $h = 0,06$ м – масса, радиус и высота цилиндрических грузов 4; $R = 0,02$ м – радиус шкива 13, жестко сидящего на оси рамки 5.

6.2. Соединить установку с блоком индикации 12. Блок индикации подключить к питающей сети.

6.3. Нажать кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели блока индикации 12.

6.4. Установить симметрично относительно оси вращения и зафиксировать цилиндрические грузы 4 на стержне рамки 5.

6.5. Измерить расстояние l_1 от оси вращения рамки 5 до ближайших торцевых плоскостей цилиндрических грузов 4.

6.6. Вычислить расстояние l от оси вращения рамки до центров тяжести цилиндрических грузов 4 по формуле $l = l_1 + h/2$.

6.7. Вращать рукой рамку 5 с грузами 4, пока ускоряющий груз 11 не коснется магнитопровода электромагнита б.

6.8. Нажать кнопку «СБРОС» на лицевой панели блока индикации 12. При этом показание индикатора обнуляется.

6.9. Нажать кнопку «ЗАП» на лицевой панели блока индикации 12.

6.10. После опускания ускоряющего груза 11 на высоту H рукой остановить вращение рамки 5 и убедиться в наличии цифровой информации на индикаторном табло.

6.11. Записать время t_1 опускания ускоряющего груза 11.

6.12. Снять цилиндрические грузы 4 с рамки 5.

6.13. Вращать рукой рамку 5, пока ускоряющий груз 11 не коснется магнитопровода электромагнита б.

6.14. Выполнить мероприятия по пунктам 6.9 и 6.10.

6.15. Записать время t_2 опускания ускоряющего груза 11.

6.16. Нажать кнопку «СБРОС». Убедиться в обнулении индикаторного табло.

6.17. По формуле (2.28) вычислить искомый момент инерции J рамки со стержнем относительно оси вращения

$$J = \frac{2M_2 \left[l^2 + \frac{1}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right) \right] t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} - M_1 R^2.$$

7. Содержание и оформлением отчета

7.1. Название лабораторной работы.

7.2. Цель лабораторной работы.

7.3. Результаты измерений и расчетов.

7.4. Выводы по лабораторной работе.

7.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Записать равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме.
2. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела?
3. Какая формула определяет кинетическую энергию твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
4. Что является единицей измерения кинетической энергии?
5. Что характеризуют моменты инерции тела относительно осей?
6. В каких единицах измеряются моменты инерции тела относительно осей?
7. Каким равенством выражается теорема Штейнера–Гюйгенса?
8. Что характеризует работа силы?
9. Что является единицей измерения работы силы?
10. По какой формуле вычисляется работа силы тяжести?
11. По какой формуле вычисляется работа момента, приложенного к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси?
12. Какие силы называются внутренними силами механической системы?
13. Какие силы называются внешними силами механической системы?
14. В каких случаях работа внутренних сил равна нулю?

3.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

Тема: Изучение колебательного движения маятника.

1. Цели и задачи выполнения лабораторной работы

1.1 *Цели выполнения работы:* 1. Расширение и закрепление теоретических знаний, полученных студентами на лекционных занятиях по теме «Свободные и затухающие колебания». 2. Оценка точности принятых предпосылок для теоретического анализа темы.

1.2. *Задачи выполнения лабораторной работы.*

1. Приобретение навыков решения практических задач.
2. Приобретение навыков самостоятельного изучения учебной литературы, устройства и работы экспериментальной установки, проведение экспериментального исследования, обработка, анализ и оформление экспериментальных результатов.
3. Приобретение опыта работы в составе группы, что очень важно для успешной последующей профессиональной деятельности обучающихся.

2. Краткая теория колебательного движения

Тело (или система тел), совершающее колебательное вращение вокруг оси, не проходящей через центр масс тела, называется маятником. Периодическое движение маятника происходит под действием силы тяжести груза, линия действия которой изменяется по отношению к оси вращения.

Рассмотрим движение маятника, состоящего из невесомого стержня OB длиной l и закрепленного на его конце груза B весом P (рис. 2.1).

Движение маятника, совершающего колебания относительно оси Oz , описывается дифференциальным уравнением вращательного движения, имеющим вид:

$$I_z \ddot{\phi} = \Sigma m_z (\bar{F}), \quad (2.1)$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси Oz .

Уравнение (2.1) без учета сопротивления движению можно записать следующим образом

$$I_z \ddot{\varphi} = -Mgl \sin \varphi, \quad (2.2)$$

где M – масса груза, равная P/g .

Для малых значений углов φ можно принять, что $\sin \varphi = \varphi$, и тогда, разделив обе части равенства (2.2) на I_z , получим дифференциальное уравнение малых колебаний в канонической форме

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (2.3)$$

где $k = \sqrt{\frac{Mgl}{I_z}}$ – круговая частота собственных колебаний маятника без учета сопротивления.

Период таких колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\sqrt{I_z}}{\sqrt{mgl}}. \quad (2.4)$$

Решение линейного, однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянным коэффициентом (2.3) имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.5)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, значения которых определяются из начальных условий: при $t = 0$ начальное смещение маятника равно величине φ_0 , а начальная скорость движения маятника соответственно равна $\dot{\varphi}_0$. Тогда с учетом этих начальных условий получим

$$C_1 = \varphi_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}. \quad (2.6)$$

Подставляя значения постоянных интегрирования из равенств (2.6) в соотношение (2.5), получим решение дифференциального уравнения (2.3) – уравнение движения в виде

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (2.7)$$

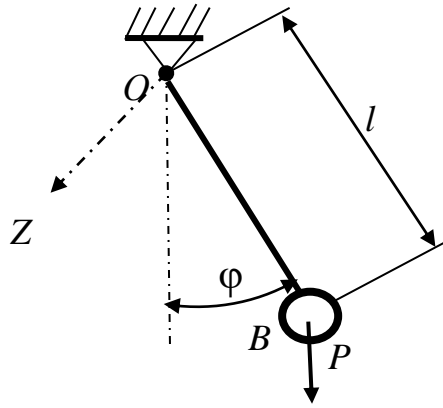


Рис. 2.1. Механическая модель маятника

Известно, что это решение можно представить и в более компактном виде

$$\varphi = \varphi_m \sin(kt + \alpha), \quad (2.8)$$

где $\varphi_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}$ – амплитуда колебаний маятника;

$\alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{\varphi_0 k}{\dot{\varphi}_0}$ – начальная фаза колебаний маятника.

Из уравнения (2.8) следует, что колебания маятника представляют собой периодический процесс, происходящий по закону синуса. Колебания, описываемые уравнениями (2.7) и (2.8), называются гармоническими, свободными. Так как уравнения (2.7) и (2.8) не учитывают сопротивления, то такие колебания, возникнув однажды, будут продолжаться бесконечно долго. Эти незатухающие колебания представляют собой идеальный случай. В реальных условиях при качании маятника его движению препятствует сопротивление. Сопротивление обусловлено моментом сил трения в подшипнике подвеса маятника (точка O), моментом сопротивления воздуха и другими факторами упругой среды.

Рассмотрим влияние на колебания момента трения $M_{тр}$. Полагая, что $M_{тр} = \text{const}$, уравнение (2.2) можно записать в виде

$$I_z \ddot{\varphi} = -Mgl \sin \varphi - M_{тр}. \quad (2.9)$$

Разделив обе части равенства (2.9) на I_z , получим

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi + \frac{M_{mp}}{I_z} = 0. \quad (2.10)$$

Здесь $k = \sqrt{\frac{Mgl}{I_z}}$ – круговая частота собственных колебаний маятника без учета сопротивления.

Если момент сопротивления принять пропорциональным скорости движения маятника (так называемое вязкое сопротивление), то есть

$$M = \mu \dot{\varphi}, \quad (2.11)$$

то уравнение (2.2) принимает вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - \mu \dot{\varphi}. \quad (2.12)$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2n \dot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (2.13)$$

где $n = \frac{\mu}{2I_z}$ – коэффициент затухания (характеризующий момент сопротивления).

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{b_1 t} + C_2 e^{b_2 t}, \quad (2.14)$$

где e – основание натуральных логарифмов; b_1 и b_2 – корни характеристического уравнения для дифференциального уравнения (2.13) равные

$$b_{1,2} = n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm ik_1, \quad (2.15)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – круговая частота собственных колебаний маятника с учетом сопротивления.

В зависимости от величины коэффициента затухания (или величины сопротивления) различают следующие варианты движения маятника:

1) **случай малого сопротивления** $n < k$. Решение уравнения (2.13) в этом случае имеет вид

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (2.16)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования

$$C_1 = \varphi_0; C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}{k_1}. \quad (2.17)$$

С учетом соотношений (2.17) выражение (2.16) приобретает вид

$$\varphi = e^{-nt} \left(\varphi_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (2.18)$$

Или в более компактной форме

$$\varphi = \varphi_m e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2.19)$$

Период колебаний в этом случае равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}. \quad (2.20)$$

Для характеристики скорости затухания колебаний вводят понятие декремента затухания (отношение максимальных значений углов отклонения маятника следующих через период)

$$D = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}, \quad (2.21)$$

или рассматривают логарифмический декремент затухания

$$\ln(D) = nT_1. \quad (2.22)$$

Этот случай движения является примером затухающих колебаний.

2) случай большого сопротивления $n > k$. Решение дифференциального уравнения (2.13) имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{b_1 t} + C_2 e^{-b_2 t}, \quad (2.23)$$

где $b_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ – корни характеристического уравнения.

В уравнениях (2.23) C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Решения, выраженные уравнением (2.23) не описывают колебательный процесс. Такое движение называется аperiодическим. Маятник совершает движение только в течение одного полупериода и из-за значительного сопротивления это движение прекращается. Графики таких движений показаны на рис. 2.2. Различие кривых (1, 2 и 3) обусловлено величиной и направленностью начальных условий маятника (начального перемещения φ_0 и начальной угловой скорости $\dot{\varphi}_0$).

3) предельный случай $n=k$. Решение дифференциального уравнения (2.13) в этом случае имеет вид

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (2.24)$$

Это уравнение, как и выше, описывает апериодическое движение. График такого движения аналогичен предыдущему случаю и показан на рис. 2.2.

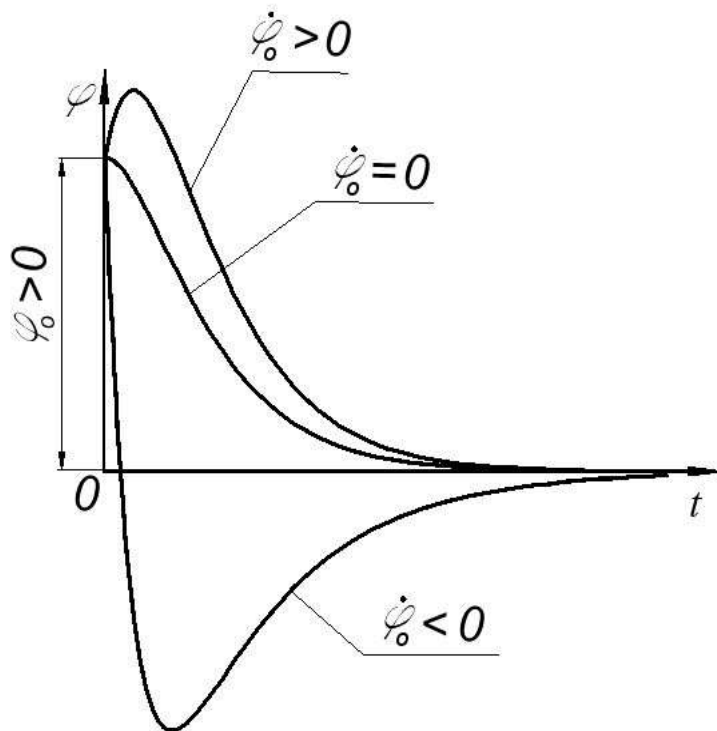


Рис. 2.2. Примеры апериодического движения маятника при различных начальных условиях

3. Оборудование – автоматизированный лабораторный комплекс для изучения колебаний маятника ТМЛ-01М

Автоматизированный лабораторный комплекс (АЛК) предназначен для изучения колебаний в системе с одной степенью свободы. Комплекс состоит из лабораторной установки ТМЛ-01М (рис. 3.1), аналого-цифрового преобразователя (АЦП), ПЭВМ типа IBM PC и программно-методического обеспечения.

Лабораторная установка ТМЛ-01М предназначена для исследования свободных колебаний математического маятника с учетом упругости и трения. На оси подвеса маятника установлен датчик углового отклонения, позволяющий вводить в ЭВМ и отображать на экране монитора процесс колебаний.

Экспериментальные результаты сравниваются с результатами математического моделирования, параметры и варианты модели подбираются с учетом согласования теоретических (модельных) и экспериментальных данных.

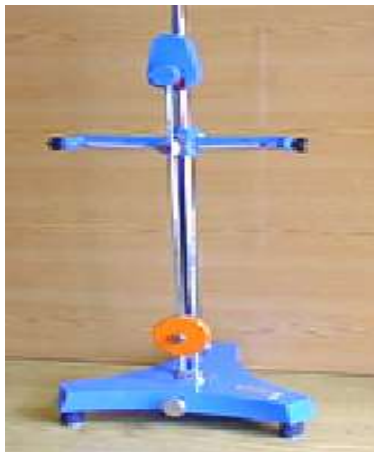


Рис. 3.1. Общий вид лабораторной установки ТМЛ-01М.

Схема лабораторной установки

Кинематическая схема лабораторной установки ТМЛ-01М показана на рис. 3.2.

Однородный стержень OB массы m_C прикреплен к неподвижному основанию при помощи цилиндрического шарнира O , имеющего горизонтальную ось. К стержню OB прикрепляется муфта A массой m_M и груз B массой m_r .

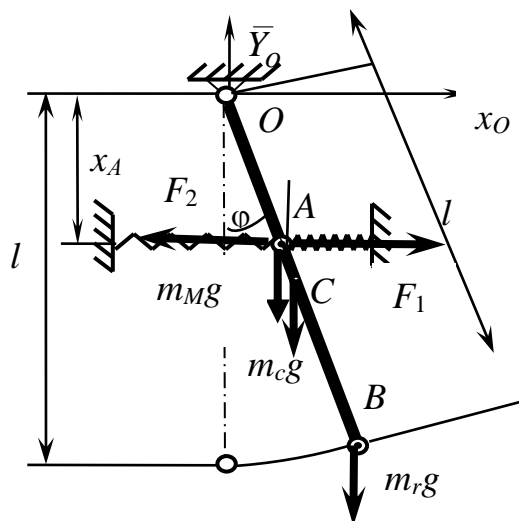


Рис. 3.2. Кинематическая схема лабораторной установки

Каждая из двух пружин жесткостью с одним концом закреплена на неподвижном основании, а другим крепится к муфте А. Пружинам задается начальная (статическая) деформация, обеспечивающая их работу только в сжатом состоянии.

В шарнирном узле O расположен датчик, фиксирующий угол φ – угол отклонения стержня OB от вертикали. В качестве чувствительного элемента в датчике применен потенциометр (резистор), на который поступает постоянное напряжение 5В.

Напряжение пропорциональное углу φ снимается с подвижного контакта потенциометра и подается на вход аналого-цифрового преобразователя.

Конструкция прибора позволяет изменять положение оси вращения маятника так, что груз со стержнем могут располагаться над осью. Таким образом, прибор можно развернуть в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси на 180° .

Составление дифференциального уравнения движения

Чтобы записать дифференциальное уравнение движения рассмотрим расчетную схему (механическую модель), показанную на рис. 3.3. При составлении дифференциального уравнения необходимо учесть силы:

$P_r = m_r g$ – сила тяжести груза B ; $P_c = m_c g$ – сила тяжести стержня OB ; $P_M = m_M g$ – сила тяжести муфты A ; \bar{F}_1 – сила натяжения правой пружины; \bar{F}_2 – сила натяжения левой пружины; M_c – момент сил сопротивления, возникающих в шарнирном узле O ; \bar{X}_0 и \bar{Y}_0 – силы реакции, возникающие в шарнире O .

Пренебрегая вертикальным смещением точки A , определим модули сил F_1 и F_2 .

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_0 - ca \sin \varphi. \\ F_2 &= F_0 + ca \sin \varphi. \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

где F_0 – начальная сила растяжения пружины; c – коэффициент жесткости пружины. Составим дифференциальное уравнение вращательного движения маятника вокруг оси Oz :

$$J_{\text{пр}} \ddot{\varphi} = \sum M_0(\bar{F}) - M_c, \quad (3.2)$$

где

$$\sum M_0(\bar{F}) = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + M_0(\bar{P}_M) + M_0(\bar{P}_c) + M_0(\bar{P}_r).$$

Составляющие этих выражений равны:

$$\begin{aligned} M_0(\bar{F}_1) &= F_1 a \cos \varphi; \\ M_0(\bar{F}_2) &= -F_2 a \cos \varphi; \\ M_0(\bar{P}_M) &= -P_M a \sin \varphi; \\ M_0(\bar{P}_c) &= -P_c \frac{l}{2} \sin \varphi; \\ M_0(\bar{P}_r) &= -P_r l \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Приведенный момент инерции маятника равен

$$J_{\text{пр}} = m_M a^2 + \frac{1}{3} m_c l^2 + m_r l^2. \quad (3.4)$$

Входящие в выражение (3.4) силы при колебаниях маятника создают как восстанавливающие моменты, так и моменты сопротивления. Мы рассматриваем маятник как модель некоторой технической колебательной системы. В этой системе моменты сопротивления могут иметь различную физическую природу. Поэтому для конкретности рассмотрим два возможных варианта физической природы этих сопротивлений.

В первом случае будем считать, что сопротивление является следствием сухого трения. Математически это запишется следующим образом:

$$M_C = \pm M_{\text{тр}}, \quad (3.5)$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент сухого трения.

Во втором случае будем считать, что момент сопротивления обусловлен наличием вязких элементов в колебательной системе, то есть он пропорционален угловой скорости вращения стержня OB :

$$M_0 = \mu \dot{\varphi}, \quad (3.6)$$

где μ – коэффициент сопротивления (коэффициент вязкости); $\dot{\varphi}$ – угловая скорость маятника.

Рассмотрим физическую модель механической системы, в которой сопротивление моделируется формулой (3.6). Для данного случая дифференциальное уравнение движения выглядит следующим образом:

$$J_{\text{пр}}\ddot{\varphi} = -c_{\text{пр}}\varphi \pm M_{\text{тр}}, \quad (3.7)$$

$$c_{\text{пр}} = 2ca^2 + \left(m_M a + \frac{1}{2} m_c l + m_r l \right) g, \quad (3.8)$$

где $c_{\text{пр}}$ – приведенный коэффициент жесткости системы маятника.

Разделив обе части равенства (3.8) на $J_{\text{пр}}$, получим

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi \pm \alpha) = 0, \quad (3.9)$$

$$\text{где } \omega^2 = c_{\text{пр}}/J_{\text{пр}}, \quad \alpha = M_{\text{тр}}/c_{\text{пр}}. \quad (3.10)$$

Здесь ω – круговая частота колебаний маятника без учета сопротивления; α – начальная фаза колебаний. Величина α имеет простой физический смысл. Она представляет собой угол поворота стержня OB , который мог бы вызвать момент сил трения $M_{\text{тр}}$.

Пусть в начальный момент времени стержень отклонен на угол $\varphi = \varphi_1$ и отпущен без начальной скорости. Тогда в первом интервале движения (от крайнего правого положения до крайнего левого положения) в уравнение (3.10) следует поставить перед α знак минус

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi - \alpha) = 0. \quad (3.11)$$

Введем новую переменную

$$\varphi_1 = \varphi - \alpha. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12), удовлетворяющее оговоренным выше начальным условиям, имеет вид

$$\varphi_1 = (\varphi - \alpha) \cos \omega t. \quad (3.13)$$

Это решение применимо, пока маятник движется влево, как это предполагалось при выводе уравнения (3.3). Крайнее левое положение будет достигнуто по истечении промежутка времени, равного π/ω , когда $\varphi_1 = -(\varphi - \alpha)$ и отклонение маятника от вертикального положения равно $\varphi - 2\alpha$. Отсюда видно, что время, необходимое для половины цикла колебания, такое же, что и в случае свободных колебаний без затухания, следовательно, постоянный момент сил трения не влияет на частоту колебания. Однако, рассматривая два крайних положения маятника, определяемых углами φ_1 и $\varphi_1 - 2\alpha$, можно заключить, что за половину цикла амплитуда колебаний уменьшается на величину 2α .

Рассматривая теперь движение маятника от крайнего левого положения вправо, и применяя те же соображения, можно показать,

что за вторую половину цикла произойдет дальнейшее уменьшение амплитуды на величину 2α . Следовательно, убывание амплитуды происходит по закону арифметической прогрессии. Наконец маятник остановится в одном из крайних положений, как только отклонение станет меньше, чем α , так как в этом положении момент сил трения окажется достаточным для того, чтобы уравновесить силы (упругости пружин и тяжести), стремящиеся вернуть маятник в вертикальное положение.

Таким образом, маятник будет совершать затухающие колебания, при которых амплитуда будет уменьшаться по линейному закону (рис. 3.3).

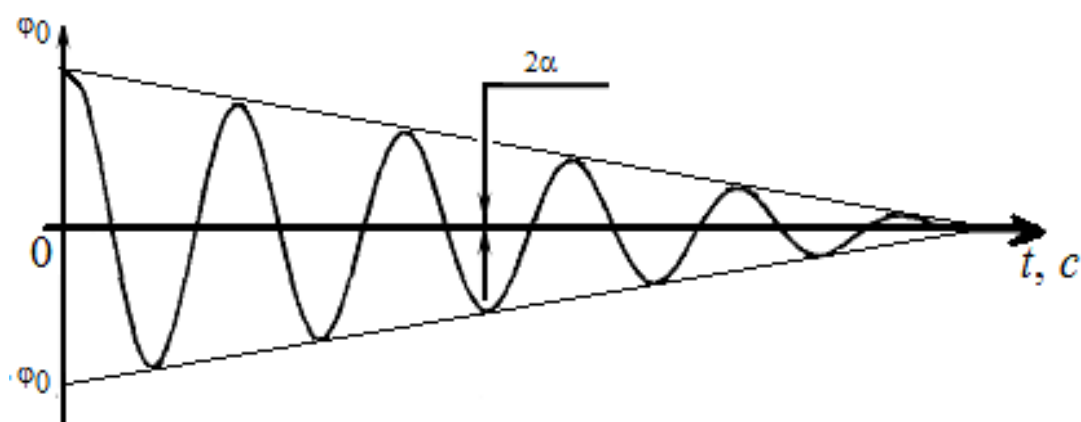


Рис. 3.3. Колебания маятника, затухающие по линейному закону

Рассмотрим теперь модель, в которой силы сопротивления имеют вязкую природу, что выражается равенством (3.7). В этом случае дифференциальное уравнение движения можно записать в следующем виде

$$J_{\text{пр}}\ddot{\varphi} = -\mu\dot{\varphi} - c_{\text{пр}}\varphi \quad (3.14)$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad (3.15)$$

где $2n = \mu/J_{\text{пр}}$.

В случае малого сопротивления $n < \omega$ решение уравнения (3.15), удовлетворяющее начальным условиям, будет иметь вид:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-nt} \cos \omega t (\dot{\varphi}_0 = -n\varphi_0). \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что маятник должен совершать затухающие колебания, при которых амплитуда будет уменьшаться по экспоненциальному закону (рис. 3.4).

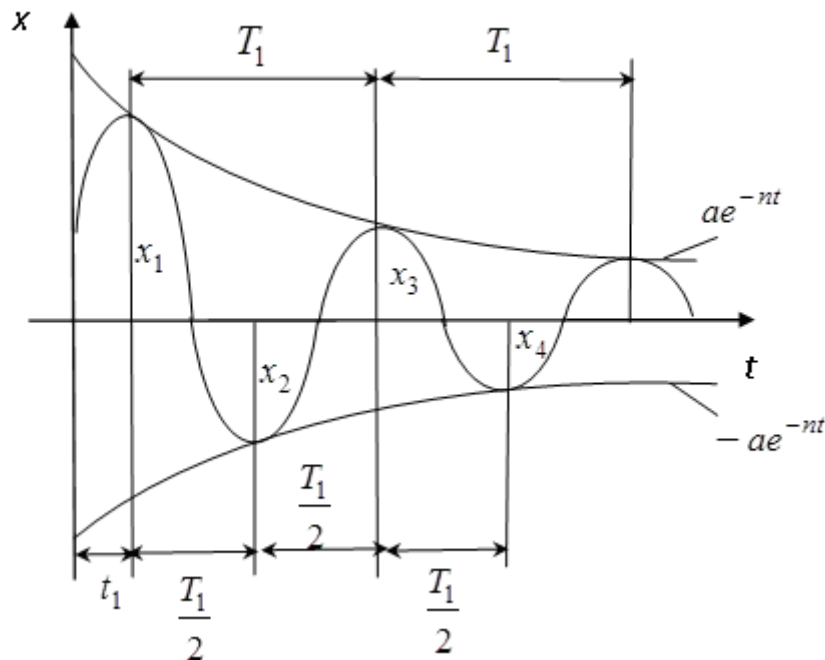


Рис. 3.4. Затухающие по экспоненциальному закону колебания маятника

Уравнение (3.10) описывает движение маятника только в одном направлении. Для полного движения можно записать следующее уравнение:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 [(\phi + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\phi}))] = 0, \quad (3.17)$$

$$\text{где } \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) = \begin{cases} -1, & \text{если } \dot{\phi} > 0 \\ 0, & \text{если } \dot{\phi} = 0 \\ 1, & \text{если } \dot{\phi} < 0 \end{cases}.$$

В общем случае в колебательной системе могут присутствовать как сухое, так и вязкое трение, тогда движение маятника описывается уравнением

$$\ddot{\phi} + 2n\dot{\phi} + \omega^2 [\phi + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\phi})] = 0. \quad (3.18)$$

Для удобства ввода уравнения в окне редактирования проведем подстановку $x = \phi$ и $\dot{x} = y$.

Тогда дифференциальное уравнение (3.18) принимает вид

$$\dot{y} + 2ny + \omega^2(x + a \cdot \text{sgn}(y)) = 0.$$

Для численного решения дифференциального уравнения (3.18) его представляют в нормальной форме Коши путем подстановок:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -2ny - \left[\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - n^2 \right] (x + \alpha \text{sgn}(y)). \end{cases} \quad (3.19)$$

Здесь T – период колебаний, его можно определить по графику, разделив интервал времени нескольких полных периодов, оцененный визуально (по сетке шкал графика), на число этих периодов; n – коэффициент сопротивления, оцениваемый по формуле:

$$n = \frac{\ln \delta A}{T}; \quad \delta A = \frac{A_1}{mA_{1-m}},$$

где m – число полных периодов; A_1 – амплитуда (максимальное отклонения колебаний).

С учетом нотаций, принятых в языке системы *LabView*, правая часть уравнения (3.19) записывается в виде, показанном на рис. 5.1.

4. Подготовка и порядок проведения лабораторной работы

Лабораторная работа проводится в три этапа. На **первом** этапе проводится расчет параметров математической модели – дифференциального уравнения второго порядка, описывающего процесс колебаний маятника. Исходные данные для расчета – массы груза, стержня и муфты, жесткости и начальные натяжения пружин – задаются преподавателем. Массы груза, стержня и муфты соответственно равны: 0,5075, 0,082 и 0,1430 кг.

Измерение расстояний до оси качания маятника груза и муфты для закрепления пружин могут произвести студенты. Жесткость каждой из пружин равна 78,29 Н/м. Результатом расчета должна быть оценка периода колебаний маятника, определяющая величину коэффициента при первой производной угла отклонения маятника.

На **втором** этапе осуществляется тарировка измерительной подсистемы путем измерения показаний потенциометрического

датчика угловых отклонений маятника для заданных углов – например, -10, 0, +10 градусов. С этой целью на экран монитора ПЭВМ выводятся диалоговые окна, показанные на рис. 4.1. Следует обратить внимание на необходимость четкой фиксации маятника в заданных положениях, что при отсутствии в установке соответствующих приспособлений можно осуществить с помощью какого-либо стержня (например, карандаша), прижав его к сегменту шкалы.

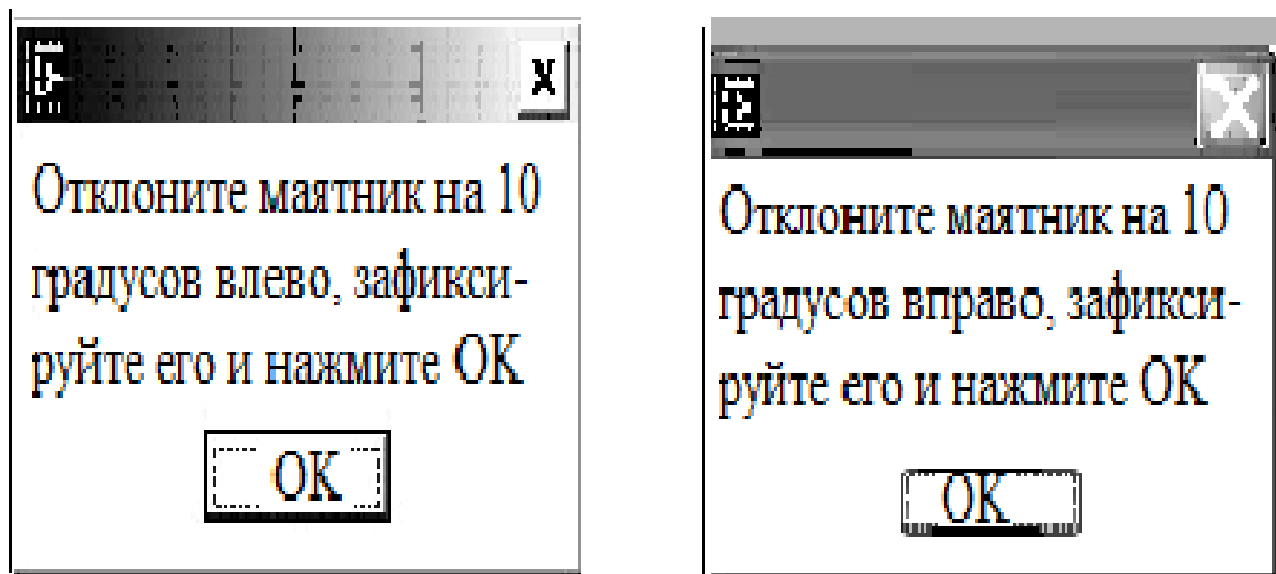


Рис. 4.1. Диалоговые окна режима тарировки измерительной подсистемы

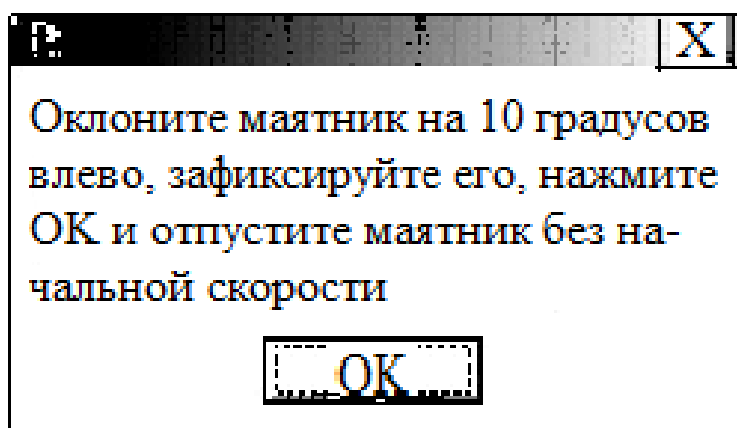


Рис. 4.2. Включение режима записи колебаний маятника

После этого включается режим записи собственных колебаний маятника (рис. 4.2), при котором необходимо отклонить маятник на заданный угол и после нажатия (щелчком мыши по соответствующей кнопке) клавиши «ОК» отпустить его без начальной скорости. График затухающих свободных колебаний немедленно регистрируется на экране индикатора (рис. 5.1). Остановить этот процесс регистрации можно в любой момент нажатием на клавишу «Окончание записи». В общем случае этот момент определяется полным затуханием колебаний маятника. Вывод графика производится в режиме автоматического масштабирования по шкале времени, так что весь процесс от начала до конца регистрируется на экране монитора (рис. 5.1). Оцифровка шкалы времени для экспериментального графика осуществляется в числе отсчетов сигнала, что позволяет обратить внимание студентов на дискретный характер ввода экспериментальных данных. Перейти к значениям времени можно, умножив число отсчетов на интервал дискретизации, установленный по умолчанию в 10 мс и совпадающий с шагом решения дифференциального уравнения.

После окончания ввода во втором графическом окне отображается результат решения дифференциального уравнения с параметрами, установленными по умолчанию и намеренно несколько отличающимися от реальных.

Третий этап состоит в оценке параметров математической модели процесса и сравнительном исследовании результатов моделирования с экспериментом. Для этого, обучаемый должен оценить параметры колебаний и подставить их в дифференциальное уравнение (правая часть уравнения представлена на панели между верхним и нижним графиками). Результат численного решения уравнения автоматически обновляется при каждом изменении уравнения. Результат численного решения уравнения накладывается на экспериментальный график путем нажатия на клавишу «Совместить графики», в результате чего можно оценить соответствие модели эксперименту и путем уточнения параметров уравнения за несколько итераций получить требуемое согласование модельных и экспериментальных данных.

5. Программное обеспечение

Основной режим работы реализуется виртуальным прибором TML-01vi. Вид экрана, формируемого программой, представлен на рис. 5.1. Графики экспериментально снимаемого процесса затухающих колебаний маятника, а также результат моделирования в одинаковых масштабах отображаются на графическом индикаторе (рис. 5.2).

В текстовом окне с заголовком «Правая часть уравнения» можно ввести в общем случае любую зависимость, в том числе нелинейную, содержащую в качестве переменных угол отклонения маятника x и его скорость y . По умолчанию вид правой части дифференциального уравнения, описывающего затухающие колебания маятника, представлен на приведенном примере и включает члены, обусловленные собственной частотой, сухим и вязким трением. При этом значение коэффициента (в приведенном примере 1,25), определяющего собственную частоту, соответствует периоду этой частоты в секундах.

После оценки (с помощью сетки шкал графика) параметров собственных колебаний обучаемый должен вычислить значения коэффициентов при членах правой части дифференциального уравнения и ввести их с помощью обычных операций редактирования с помощью клавиатуры и мыши в уравнение. При этом автоматически производится моделирование процесса собственных колебаний, график которого строится на фоне экспериментального процесса.

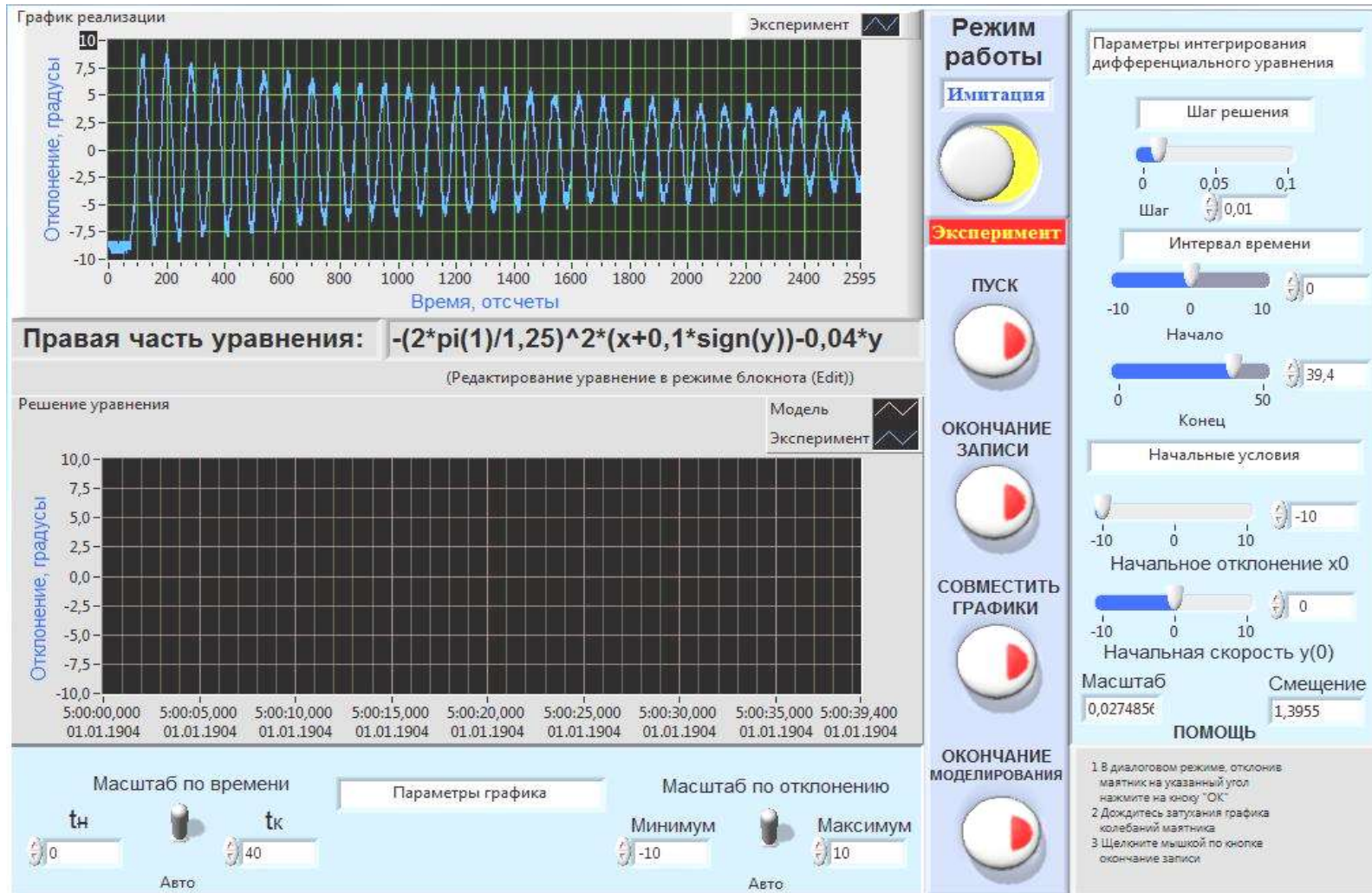


Рис. 5.1. Панель виртуального прибора после ввода экспериментального графика

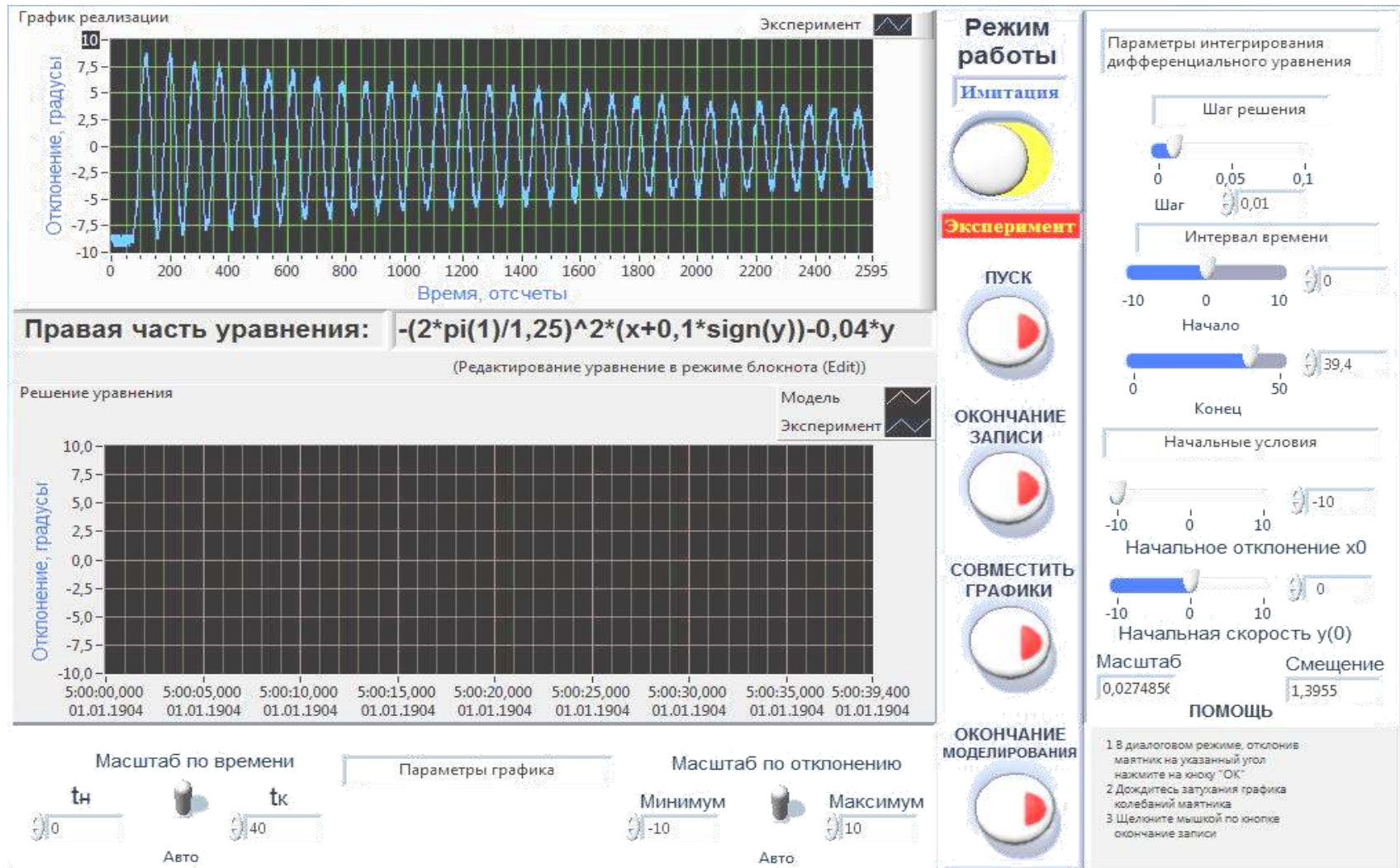


Рис. 5.2. Результаты эксперимента

6. ОПИСАНИЕ ФОРМУЛ

Дифференциальное уравнение вращательного движения маятника

$$J_{\text{пр}}\ddot{\varphi} = \sum M_0(\bar{F}) - M_c,$$

где

$$\sum M_0(\bar{F}) = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + M_0(\bar{P}_M) + M_0(\bar{P}_c) + M_0(\bar{P}_r):$$

$$M_0(\bar{F}_1) = F_1 a \cos \varphi; \quad M_0(\bar{F}_2) = -F_2 a \cos \varphi;$$

$$M_0(\bar{P}_M) = -P_M a \sin \varphi; \quad M_0(\bar{P}_c) = -P_c \frac{l}{2} \sin \varphi;$$

$$M_0(\bar{P}_r) = -P_r l \sin \varphi.$$

Приведенный момент инерции маятника равен

$$J_{\text{пр}} = m_M a^2 + \frac{1}{3} m_c l^2 + m_r l^2.$$

Уравнение полного движения маятника

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 [(\varphi + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}))] = 0.$$

$$\text{где } \operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} -1, & \text{если } \dot{\varphi} > 0 \\ 0, & \text{если } \dot{\varphi} = 0 \\ 1, & \text{если } \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$

Форма Коши $\ddot{\varphi} + \omega^2 [(\varphi + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}))]$.

Отношение амплитуд колебаний за период:

$$\sigma_A = \frac{A_j}{A_{j+1}}; \quad \text{Коэффициент } n: \quad n = \ln(\sigma A)/T;$$

Значение круговой частоты $\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - n^2}$.

7. Контрольные вопросы

1. Какие виды колебаний Вам известны?
2. Какие параметры характеризуют колебания тел?
3. Как реализуются сопротивления на практике?
4. Что называется частотой, круговой частотой в колебательных процессах?
5. Как называется мера скорости затухания колебательного процесса?
6. Как вычислить декремент затухания?
7. Приведите условия возникновения колебаний в авиационных двигателях.

ТЕСТ - ВОПРОСЫ

A Дифференциальное уравнение вращательного движения маятника:

1 $J_{\text{пр}} \ddot{\phi} = \sum_j M_j(\bar{F}_j) - M_c$ 2 $J_{\text{пр}} \ddot{\phi} = \sum_j M_j(\bar{F}_j) - 2M_c$ 3 $J_{\text{пр}} = m_s a^2 + \frac{1}{3} m_s l^2 + m_e l^2$

B Указанное уравнение $\ddot{\phi} + \omega^2 [\phi + a^* \text{sgn}(\dot{\phi})]$ является уравнением:

- 1 Приведенного момента маятника 2 Движения маятника в одном направлении 3 Движения маятника в форме Коши

C Какой график описывает идеальную модель колебаний маятника:



D Коэффициент μ это коэффициент:

- 1 Угла поворота 2 Сопротивления 3 Момент сил трения

E Оцените уверенность Ваших знаний в баллах (самотестирование):

- 1 Отлично - 5 2 Хорошо - 4 3 Уд. -3 4 Неуд. -2

КНОПКИ ВЫБОРА ОТВЕТА

КНОПКА ОЦЕНКИ

0 0 0 0 0

Реальная оценка 0 Виртуальная оценка

8. Содержание и оформление отчета

Отчет о проделанной работе должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Результаты расчетов.
4. Выводы о соответствии теоретических расчетов с экспериментальными результатами.
5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.
6. Отчет о проделанной работе должен быть защищен в назначенный преподавателем срок.

3.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11

Тема: Вынужденные колебания диска с одной степенью свободы.

1. Цели и задачи выполнения работы

1.1. *Цели выполнения работы:* 1. Расширение и закрепление теоретических знаний, полученных студентами на лекционных занятиях по теме вынужденные колебания. 2. На опыте убедиться в адекватности теоретических методов исследования и достоверности установленных с их помощью результатов.

1.2. *Задачи выполнения лабораторной работы.*

1. Закрепление, углубление и расширение знаний студентов при решении конкретных практических задач по теме вынужденных колебаний. 2. Развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности студентов. 3. Выработка способности логического мышления и осмысления самостоятельно полученных данных. 4. Приобретение навыков самостоятельного изучения учебной литературы, устройства и работы экспериментальной установки, приведения экспериментального исследования, обработки, анализа и оформления экспериментальных результатов. 5. Приобретение опыта работы в составе группы, что очень важно для успешной последующей профессиональной деятельности выпускников.

2. Краткая теория колебаний материальной точки

Предлагаемая в данной лабораторной работе теория содержит краткие основные теоретические сведения по вынужденным колебаниям. Для более глубокого изучения темы необходимо воспользоваться материалами, изложенными в лекционном курсе, в учебниках и учебных пособиях по теоретической механике.

2.1. Основные предпосылки теоретического анализа вынужденных колебаний

В данной лабораторной работе рассмотрены колебательные движения жесткого диска, вращающегося относительно своего центра. Стальная пружина в форме спирали Архимеда упруго препятствует вращению диска, создавая упругий момент.

Если вывести данный диск из положения равновесия и свободно отпустить его, то при этом возникнут вращательные колебания. Жесткость пружины характеризуется коэффициентом жесткости на кручение C . Коэффициент жесткости пружины на кручение равен моменту, который скручивает пружину на единичный угол.

Полагая, что $C = \text{const}$, крутящий момент, действующий на диск прямо пропорционален величине угла поворота диска. Сопротивления движению считают пропорциональным первой степени угловой скорости.

2.2. Основы теории вынужденные колебания жесткого диска

Рассмотрим жесткий диск, который может вращаться относительно своей оси и скрепленный в своем центре с центром пружины. Другой конец пружины получает знакопеременный момент, который передается от рычага, связанного с электродвигателем.

Закон вращательного движения основан на теореме об изменении кинетического момента механической системы. Так как известно, что математическая формулировка общих теорем динамики имеет статус законов движения, в частности дифференциальных уравнений движения. Его можно представить в виде

$$I_C \ddot{\phi} = \sum_1^i M_{C_i} = M_{C_1} + M_{C_2} + M_{C_3}, \quad (2.1)$$

где I_C – момент инерции жесткого диска относительно его оси, проходящей через цент масс диска и перпендикулярный плоскости диска; $M_{C_1} = -C\phi$ – упругий момент, с которым действует пружина на ось диска; $M_{C_2} = -\mu\dot{\phi}$ – момент сопротивления движению;

$M_{C_3} = H \sin pt$ – знакопеременный возбуждающий момент, который передается на конец пружины от рычага, соединенного с

электродвигателем; H – амплитуда возбуждающего момента; p – круговая частота возбуждающего момента.

После подстановки значений этих моментов в равенство (2.1) получим

$$I_C \ddot{\varphi} = -C\varphi - \mu\dot{\varphi} + H \sin pt. \quad (2.2)$$

Разделив обе части равенства на I_C , получим каноническую форму дифференциального уравнения вынужденных колебаний

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin pt, \quad (2.3)$$

где $2n = \frac{\mu}{I_C}$; $k^2 = \frac{C}{I_C}$; $h = \frac{H}{I_C}$.

Здесь n, k, h – коэффициент сопротивления, круговая частота собственных колебаний системы (без учета сопротивления) и относительная величина возмущающего момента соответственно.

Решение дифференциального уравнения (2.3) можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (2.4)$$

где φ_1 – составляющая затухающих колебаний жесткого диска; φ_2 – составляющая вынужденных колебаний.

$$\varphi_1 = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t), \quad (2.5)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – круговая частота затухающих колебаний.

Выражение (2.5) является решением однородного дифференциального уравнения вида

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \quad (2.6)$$

Коэффициенты A и B – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (2.3) следует искать в виде

$$\varphi_2 = D \sin(pt) + E \cos(pt), \quad (2.7)$$

где D и E – коэффициенты, подлежащие определению.

Для их определения находят первую и вторую производные уравнения (2.7) и подставляют эти значения в уравнение (2.3). Члены, содержащие $\sin(pt)$ и $\cos(pt)$, дают возможность составить два уравнения, из решения которых можно найти неизвестные D и E .

После их определения решение уравнения (2.7) принимает вид

$$\varphi_2 = \frac{\delta}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2\alpha z^2}} \sin(pt + \eta - \varepsilon). \quad (2.8)$$

В равенстве (2.8): δ – поворот диска под воздействием статически приложенного момента H ; z – соотношение круговых частот вынужденных и собственных колебаний $z = \frac{p}{k}$ – (коэффициент расстройки); b – относительный коэффициент сопротивления $b = \frac{n}{k}$; η – начальная фаза вынужденных колебаний; ε – сдвиг фаз между фазой возмущения и фазой вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \text{ или } \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2bz}{1 - z^2}.$$

Период возбуждающих колебаний диска равен $T = \frac{2\pi}{p}$.

Амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления определяется равенством

$$B = \frac{\delta}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2z^2}}. \quad (2.9)$$

С учетом этих соотношений составляющая вынужденных колебаний принимает вид

$$\varphi_2 = B \sin(pt + \eta - \varepsilon). \quad (2.10)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот $z = \frac{p}{k}$. При $z = 1$, т.е. при $p = k$ (режим резонанса) амплитуда колебаний многократно возрастает. При отсутствии сопротивления на режиме резонанса амплитуда колебаний при $z = 1$ стремится к бесконечности. При наличии сопротивления амплитуда колебаний достигает конечной величины, максимальное значение которой равно

$$b_{\max} = \frac{\delta}{2b\sqrt{1-b^2}}. \quad (2.11)$$

Максимальное значение амплитуды в этом случае достигается при критическом значении соотношения частот ($z_{\text{кр}}$), причем $z_{\text{кр}} < 1$

$$z_{\text{кр}} = \sqrt{1 - 2b^2}. \quad (2.12)$$

Для анализа влияния параметров механической системы на ее вибрационные свойства строят амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики, принимая значения z от 0 до 1,5.

Для характеристики процесса колебаний часто применяют понятие **коэффициента динамичности**. Коэффициент динамичности показывает во сколько раз максимальное перемещение (или угол поворота) точки (или системы) условиях колебаний (при $z > 0$) больше, чем в статических условиях (при $z = 0$) при равных возбуждающих силах (или моментах). Таким образом, коэффициент динамичности равен

$$K_D = \frac{\varphi_{2\max}}{\varphi_{стат}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2k^2}}. \quad (2.13)$$

Еще одна важная характеристика **добротность**. Добротность это параметр колебательной системы, определяющий ширину резонанса и характеризующий, во сколько раз запасы энергии в системе больше, чем потери энергии за один период колебаний

$$Q = \frac{2\pi f_0 W}{P_D}, \quad (2.14)$$

где f_0 – резонансная частота колебаний; W – энергия, запасенная в колебательной системе; P_D – рассеиваемая мощность. Чем больше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии за одно колебание.

3. Автоматизированный лабораторный практикум по теоретической механике тмл-08м

Комплекс состоит из лабораторного стенда ТМЛ-37 и персональной ЭВМ, связанных между собой интерфейсным кабелем. Стенд ТМЛ-37 (рис. 3.1) включает электромеханическую установку и блок управления, соединенные между собой кабелем. ПЭВМ оснащена интерфейсной платой для аналого-цифрового преобразования и ввода в ЭВМ сигналов с датчиков стенда, а также программным обеспечением.



Рис. 3.1. Общий вид лабораторного стенда ТМЛ-08М

Установка приводится в движение электродвигателем, закрепленным на неподвижном основании. Вращение вала электродвигателя через муфту и червячный редуктор передается кривошипному механизму с регулируемым эксцентриситетом. Кривошип через тягу соединен с рычагом, качающимся на неподвижной оси.

Таким образом, рычаг совершает вокруг своей оси вращательно-колебательные движения по закону, близкому к синусоидальному. На рычаге установлен кронштейн, в котором жестко закреплен внешний конец спиральной пружины. Внутренний конец этой пружины закреплен на валу, на котором установлен твердый диск. Вал установлен в опорах с шарикоподшипниками, так что диск может вращаться вокруг оси вала. Наличие кинематической связи через упругий элемент – спиральную пружину – обеспечивает передачу возмущающего воздействия, формируемого кривошипно-рычажным механизмом, диску. Угловые отклонения рычага и диска могут быть измерены с помощью потенциометрических датчиков, кинематически связанных с соответствующими осями через зубчатые колеса.

Лабораторная работа проводится по принципу сравнения экспериментальных данных с теоретическими. Экспериментальные данные отображаются в виде совокупности точек, соответствующих оценкам параметров каждого периода вынужденных колебаний при изменении частоты возмущения в некотором диапазоне частот.

Вычисление амплитуды и фазы осуществляется на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков углов поворота выходного вала рычажного механизма и диска, т.е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. Запись сигналов и их обработка, получение параметров вынужденных колебаний диска (частоты амплитуды и фазы) поводится с помощью аппаратно-программного комплекса ПЭВМ.

3.1. Составление дифференциального уравнения движения

Вынужденные колебания диска вызваны кинематическим возмущением конца пружины O' , которое сообщает электродвигатель установки (рис. 3.2).

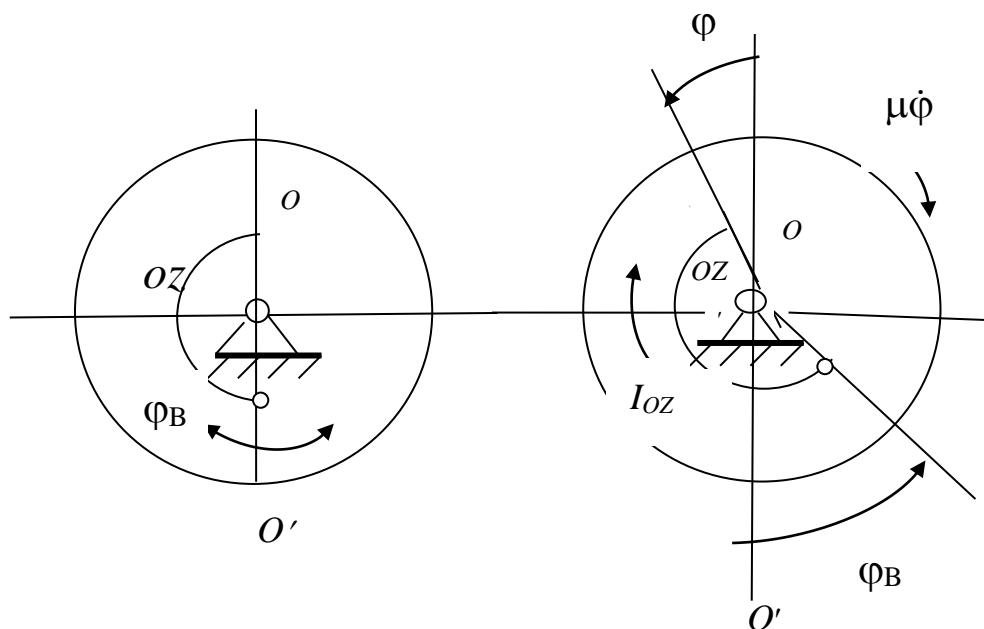


Рис. 3.2. Схема положений диска

Уравнение вынужденных колебаний исполнительного элемента диска (уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси Oz) запишется в виде

$$J_{OZ}\ddot{\phi} = -\mu\dot{\phi} - C(\phi - \phi_B), \quad (3.1)$$

где $\phi_B = \varphi_0 \sin(pt + \delta)$ – угловое возмущение конца спиральной пружины.

Разделив обе части уравнения (3.1) на J_{Oz} получим

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = \frac{C\varphi_0}{J_{Oz}} \sin(pt - \delta), \quad (3.2)$$

где обозначения соответственно равны $2n = \frac{\mu}{J_{Oz}}$; $k^2 = \frac{C}{J_{Oz}}$.

Здесь k – круговая частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления, n – обобщенный коэффициент сопротивления системы.

Размерности:

$$[C] = \text{Н} \cdot \text{м} / \text{рад}; \quad [\mu] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} / \text{рад};$$

$$[n] = \frac{[\mu]}{J_{Oz}}; \quad [n] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}} = \text{с}^{-1} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$[k] = \frac{[C]}{[J_{Oz}]} = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}} \right]^{1/2} = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{рад}} \right]^{1/2} = \text{с}^{-1} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Решение уравнения (3.1) для вынужденных колебаний ищем в виде

$$\varphi = a \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (3.3)$$

Дифференцируя, уравнение (2.17) получим

$$\dot{\varphi} = ap \cos(pt + \delta - \varepsilon), \quad (3.4)$$

$$\ddot{\varphi} = -ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (3.5)$$

Здесь a – амплитуда вынужденных колебаний системы, ε – сдвиг фаз между фазой возмущения ψ_B и фазой вынужденных колебаний ψ_{BK} :

$$\varepsilon = \psi_B - \psi_{BK}.$$

Отсюда, если $\psi_B = pt + \delta$, то $\psi_{BK} = pt + \delta - \varepsilon$.

Затем, подставляя в уравнение (2.15) значения производных (3.4) и (3.5), получим

$$\begin{aligned} & -ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nap \cos(pt + \delta - \varepsilon) + k^2 a \sin(pt + \delta - \varepsilon) = \\ & = k^2 \varphi_0 \sin[(pt + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = \\ & = k^2 \varphi_0 [\sin(pt + \delta - \varepsilon) \cos \varepsilon + \cos(pt + \delta - \varepsilon) \sin \varepsilon]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим $h = k^2 \varphi_0$.

Тогда получим $a(k^2 - p^2) = h \cos \varepsilon$, $2npa = h \sin \varepsilon$, отсюда

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}}. \quad (3.7)$$

Пусть $a = \varphi_a$ (φ_a – максимальное угловое отклонение при вынужденных колебаниях диска)

$$\varphi_a = \frac{\varphi_0 k^2}{\sqrt{|k^2 - p^2|^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}}. \quad (3.8)$$

Здесь $Q = \frac{z}{2n}$ – добротность механической системы; $z = \frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки, p – частота вынужденных колебаний системы, равная частоте возмущающего воздействия (частоте возмущения).

Введем нормирование φ_a : $\lambda = \frac{\varphi_a}{\varphi_\varphi}$,

$$\text{тогда } \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}}. \quad (3.9)$$

Для сдвига фаз имеем

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \text{ или } \varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{z/Q}{1 - z^2} \right). \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9) и (3.10) определяют, соответственно АЧХ и ФЧХ системы. Вид этих характеристик приведен на рис. 3.3. При увеличении частоты возмущения от нуля АЧХ изменяется от значения, равного единице, до максимального значения λ_{\max} , достигаемого в области резонанса, а затем уменьшается до нуля при частотах, стремящихся к бесконечности. ФЧХ монотонно изменяется в этом же диапазоне частот от нуля до π .

Резонанс в системе (диск с пружиной и демпфером) наступает при $z = 1$ ($p = k$).

Тогда из формулы (2.3) следует, что $\lambda_{рез} = Q$ или $\lambda_{рез} = \varphi_{рез} / \varphi_1 = k/2n$, откуда $\varphi_{рез} = \varphi_1 k/2n$ или $\varphi_{рез} = h/2nk$, так как $\varphi_1 = h/k^2$.

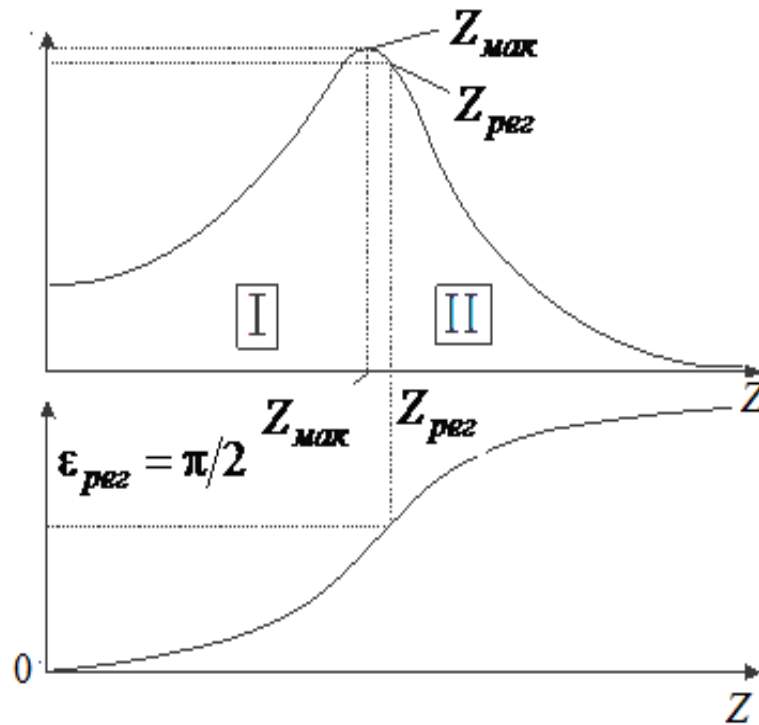


Рис. 3.3. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики колебаний системы

Однако наибольшее значение $(\varphi_\varphi)_{PE3}$ или λ_{MAX} достигается при $\varphi_{MAX} = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, и это значение равно $(\varphi_a)_{max} = \frac{h}{2nk_1}$,

$$\text{а } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} \text{ или } (\varphi_a)_{MAX} = \frac{\varphi_\varphi k^2}{2nk_1} = \frac{\varphi_0}{2n} \cdot \frac{k}{k_1} = (\varphi_a)_{PE3} \frac{k}{k_1}.$$

Так как $k > k_1$, то $(\varphi_\varphi)_{MAX} > (\varphi_a)_{PE3}$. или $\lambda_{MAX} > \lambda_{рез}$. (рис. 3.3).

4. Описание формул

Уравнение вынужденных колебаний исполнительного элемента диска (закон колебаний)

$$J_{Oz} \ddot{\varphi} = -\mu \dot{\varphi} - C(\varphi - \varphi_B), \quad (4.1)$$

где $\varphi_B = \varphi_0 \sin(pt + \delta)$ – угловое смещение конца спиральной пружины.

Перепишем уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = \frac{C\varphi_0}{J_{Oz}} \sin(pt + \delta), \quad (4.2)$$

где $2n = \frac{\mu}{J_{Oz}}$, $k^2 = \frac{C}{J_{Oz}}$.

Здесь k – круговая частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления, n – обобщенный коэффициент сопротивления системы.

Пусть $a = \varphi_a$ (φ_a – максимальное угловое отклонение при вынужденных колебаниях диска)

$$\varphi_a = \frac{\varphi_0 k^2}{\sqrt{|k^2 - p^2|^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2 / Q^2}}. \quad (4.3)$$

Здесь $Q = \frac{k}{2n}$ – добротность механической системы; $z = \frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки, P – круговая частота вынужденных колебаний системы, равная частоте возмущающего воздействия.

Введем нормирование φ_a . Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2 / Q^2}}. \quad (4.4)$$

Для сдвига фаз имеем $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$

или
$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{z/Q}{1 - z^2}. \quad (4.5)$$

5. Выполнение лабораторной работы

5.1. Экспериментальное определение параметров установки

Сначала необходимо определить характеристики системы k и n . Для этого проведем эксперимент с записью свободных (собственных) колебаний системы. Определим условный период затухающих колебаний системы с одной степенью свободы T_1 (рис. 5.1). Затем вычислим $k_1 = 2\pi/T_1$ – круговую частоту затухающих колебаний системы с одной степенью свободы и далее по записи колебаний найдем обобщенный коэффициент сопротивления n .

Определим логарифмический декремент колебаний

$\eta = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = nT_1$, замерив $q_i = (\varphi_{a_i})_c$ и $q_{i+1} = (\varphi_{a_{i+1}})_c$ по графику

собственных колебаний системы (рис. 5.1). Отсюда $n = \frac{\eta}{T_1}$. Далее

определим $k = \sqrt{k_1^2 + n^2}$ и $Q = \frac{k}{2n}$.

Задавая значения z при известном Q строим теоретические кривые $\lambda = \lambda(z)$ и $\varepsilon = \varepsilon(z)$ по формулам (4.4) и (4.5).

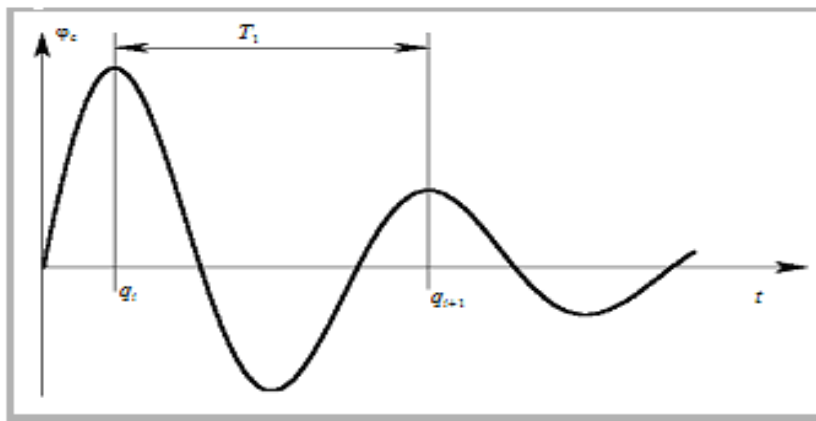


Рис. 5.1. График движения системы при затухающих колебаниях

5.2. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний системы

Механическая система приводится в возмущение через упругий элемент (спиральную пружину) с помощью электродвигателя и кривошипного механизма, соединенного со спиральной пружиной. Датчики на установке фиксируют угловые отклонения диска и возмущения. Программное обеспечение реализует алгоритмы анализа сигналов от датчиков и оценивает амплитуду φ_a и частоту p вынужденных колебаний диска, а также сдвиг фаз ε . При достаточно большом обобщенном коэффициенте сопротивления n свободные (собственные) колебания в системе быстро затухают. Поэтому при проведении эксперимента по замеру параметров вынужденных колебаний после задания частоты возмущения необходимо выждать некоторое время, чтобы диск вышел на режим установившихся движений (т.е. на режим фактически только вынужденных колебаний).

Экспериментальные данные можно нормировать по амплитудному значению возмущения φ_a . Тогда получим множество точек, положение которых соответствует зависимости $\lambda_i = \lambda_i(p_i)$. Величина φ_a устанавливается в экспериментах за счет конструктивных параметров приводного механизма. Этот параметр можно определить с помощью некоторого «нормирующего» эксперимента, позволяющего измерить φ_a , φ_0 и p и определить

$$\varphi_0 = \varphi_a \sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2 / Q^2}.$$

Дальнейшую серию экспериментов по определению АЧХ и ФЧХ для данного φ_0 , проводим, задавая различные частоты

вынужденных колебаний p , и замеряя φ_a и ε_i . Значения $\lambda_i = \frac{\varphi_a}{\varphi_0}$. $\varepsilon_i = \psi_E - \psi_{EK}$ при определенных p_i наносятся на график экспериментальной частотной характеристики в виде точек.

При исследовании кривой $\lambda = \lambda(p)$ ($\lambda = \lambda(z)$), устанавливая требуемые значения z_i (или p_i), необходимо (рис. 2.3):

- 1) провести замеры в дорезонансной области;
- 2) оценить частоту p_{\max} (z_{\max}), соответствующую максимуму амплитуды вынужденных колебаний λ_{\max} для данных k, n, φ_0 ;

3) провести эксперимент при резонансе $z_{рез} = p/k = 1$ (т.е. при $p = k$) и сравнить значение $\lambda_{рез}$ с λ_{max} (показать, что $\lambda_{рез} > \lambda_{max}$);

4) провести эксперимент в зарезонансной области II и показать, что с увеличением частоты возмущения (вынужденных колебаний) амплитуда вынужденных колебаний уменьшается и стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$).

Такой порядок работы можно повторить при ином сопротивлении в системе (изменив его с помощью демпфера). При этом кривые (рис. 3.3) изменят свой вид (рис. 5.2).

При значительном увеличении сопротивления она может принять вид кривой III, а при значительном снижении сопротивления в системе – вид кривой I. На кривой I частота, соответствующая значению λ_{max} , смещается по оси абсцисс к значению $z_{рез}$.

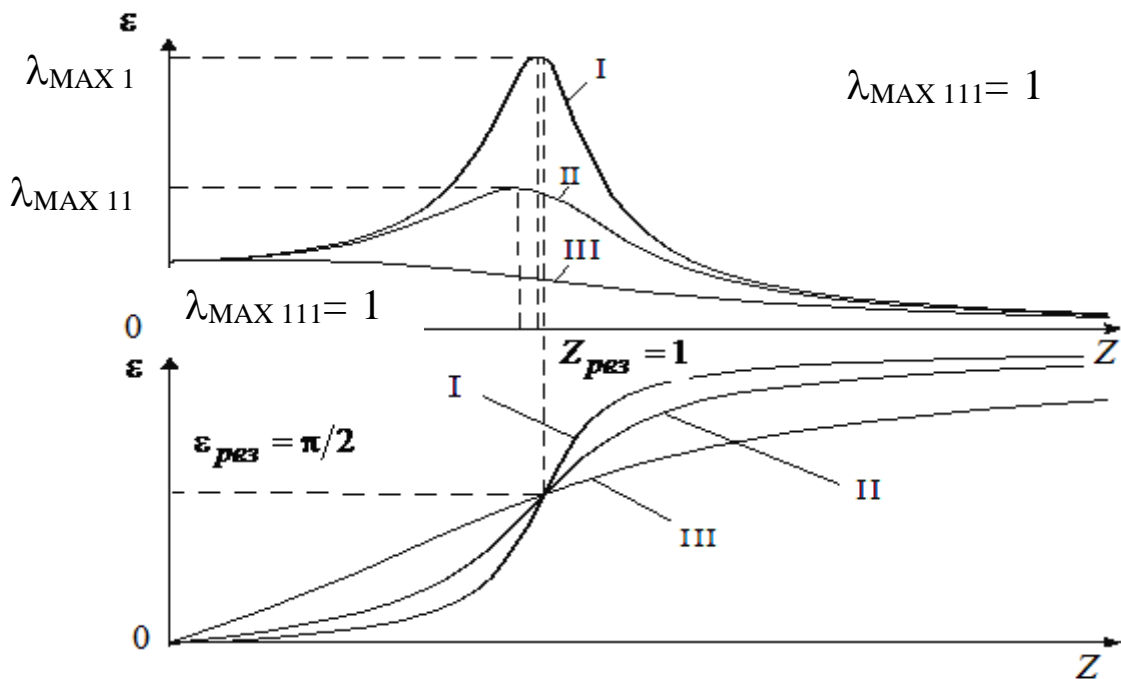


Рис. 5.2. Измененные кривые амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик

6. Представление результатов экспериментов и их анализ

Сначала проводят замеры k и n . Для этого диск толчком отклоняют от положения равновесия и отпускают, при этом записываются затухающие колебания системы (рис. 5.2). По кривой свободных колебаний $\varphi_c = \varphi_s(t)$ определяют T_1 (k_1) и n , а затем k . (Эти замеры производят, естественно, при выключенном приводе).

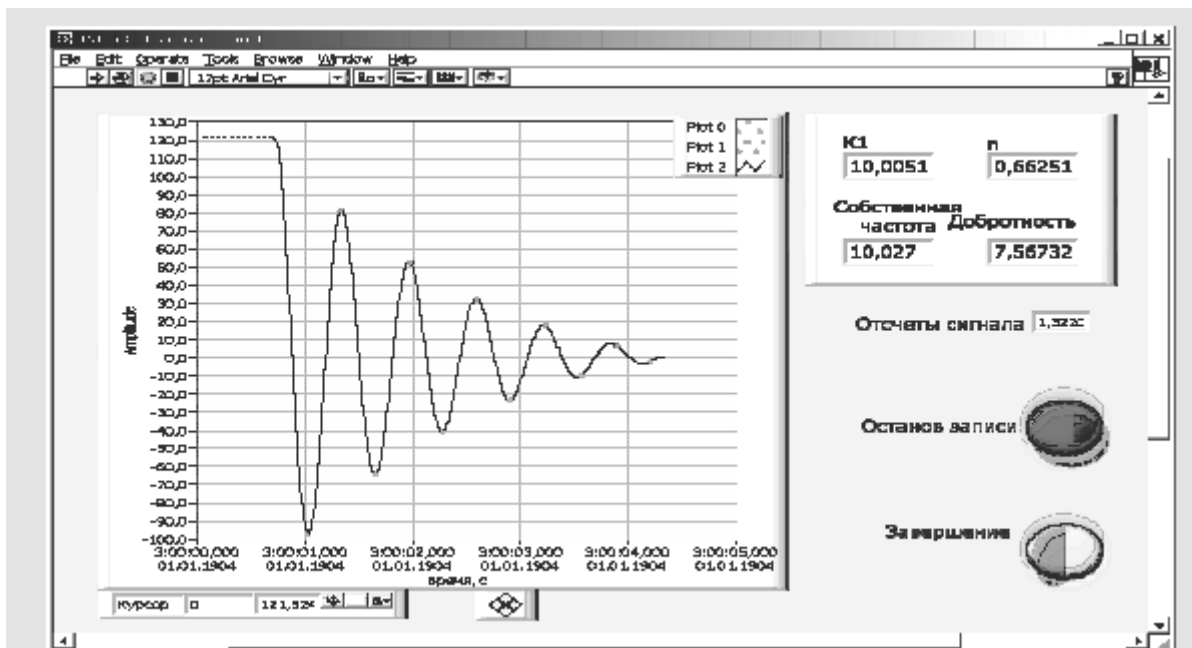


Рис. 6.1. Схема движения системы при затухающих колебаниях

Эксперимент по построению АЧХ и ФЧХ проводят при включенном электродвигателе и включенном ($n = n_1$) или отключенном ($n = n_2$) демпфере, $n_1 > n_2$. Замеры начинают вести на малых частотах возмущения (малых оборотах двигателя). Затем частоту возмущения постепенно плавно увеличивают. В процессе работы установки ПЭВМ непрерывно регистрирует частоту (рассогласование), амплитуду (отношение амплитуд $\lambda = \varphi_1/\varphi_0$) и фазу (разность фаз $\varepsilon = \psi_E - \psi_{EB}$) вынужденных колебаний. По оси ординат откладывают нормированную амплитуду вынужденных колебаний системы $\lambda = \varphi_1/\varphi_0$ и сдвиг фаз ε , а по оси абсцисс рассогласование z .

Каждому периоду колебаний соответствует пара точек (z_i, i) , (z_j, j) , отображаемых соответственно синим для амплитуды и малиновым для фазы цветом. На рис. 6.2 вид экрана представлен в черно-белом варианте. Экспериментальные точки при большом числе замеров сливаются в линию, характер которой должен соответствовать виду теоретической кривой.

На экране дисплея строится и теоретическая кривая. При ее построении используются k и n , полученные по экспериментальным данным для свободных (затухающих) колебаний.

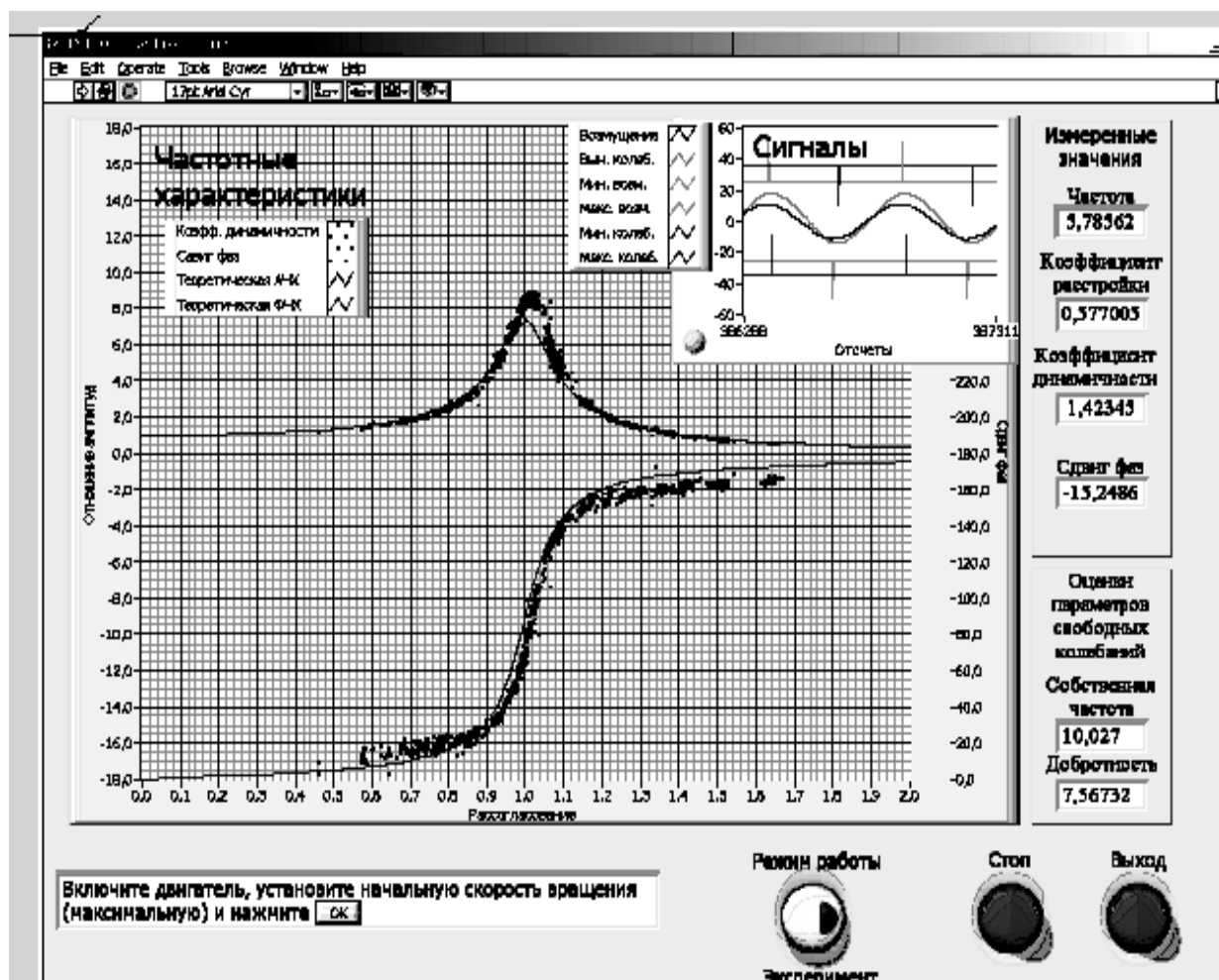


Рис. 6.2. К расчету коэффициента динамичности в условиях вынужденных колебаний

Из рис. 6.2 видно, что экспериментальные точки достаточно хорошо подтверждают использование математической модели для описания вынужденных колебаний диска. Характер экспериментальных кривых АЧХ и ФЧХ (рис. 6.3) подтверждают эту

модель. Максимальные относительные отклонения экспериментальных данных от теоретических зависимостей не превышает 10 % (по АЧХ)

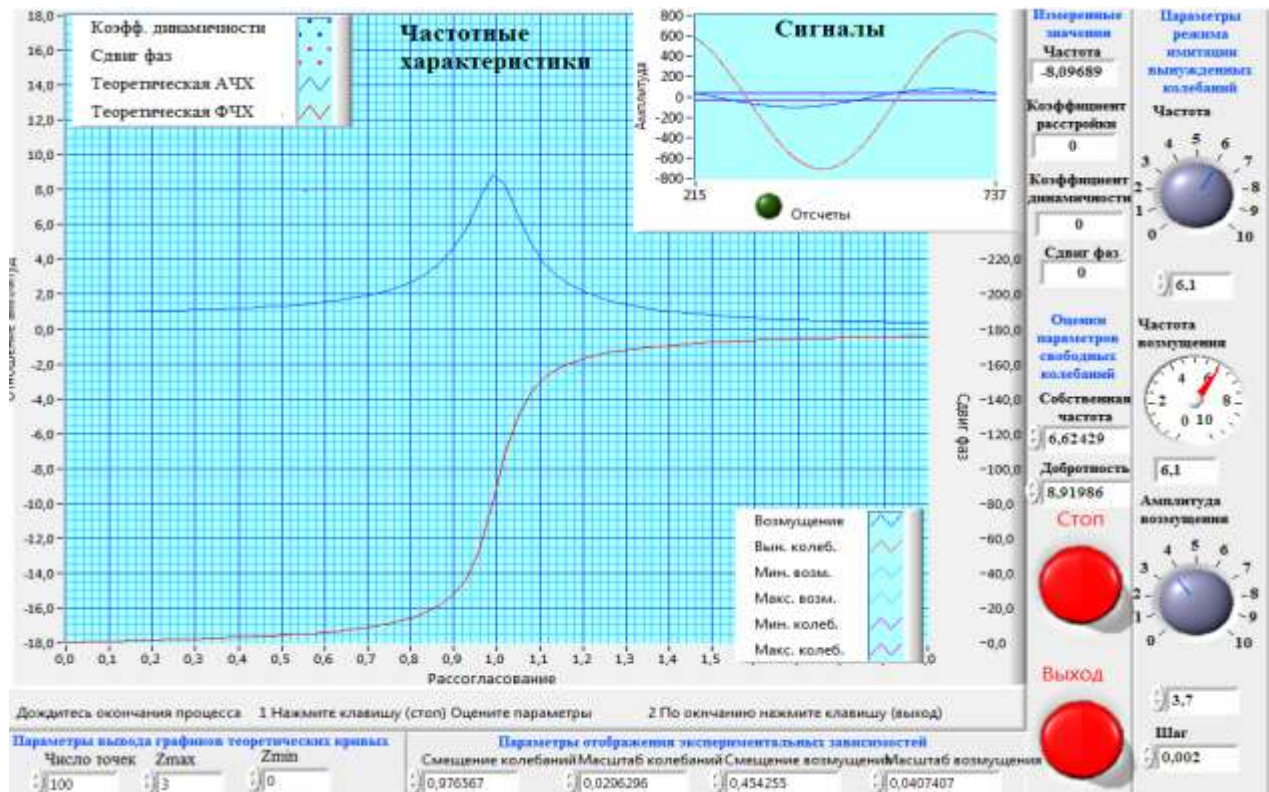


Рис. 6.3. Экспериментальные амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

7. Автоматизированная проверка усвоения материала

ТЕСТ - ВОПРОСЫ

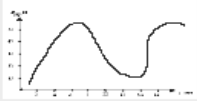
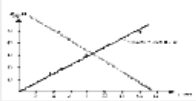
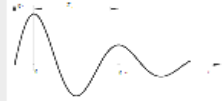
A Уравнение добротности механической системы имеет вид:

1 $Q = \frac{K}{2n}$ **2** $Q = \frac{K}{2n} * d$ **3** $Q = \frac{K}{2n} + \lambda$

B Указанное уравнение $\tan \varepsilon = \frac{2\lambda p}{K^2 - p^2}$ является уравнением:

1 Уравнением момента **2** Уравнением сил трения **3** Уравнением сдвига фаз

C Какой график описывается собственными колебаниями системы:

1  **2**  **3** 

D Коэффициент Z это коэффициент:

1 Момент сил трения **2** Крутящий момент **3** Коэффициент расстройки

E Оцените уверенность Ваших знаний в баллах (самотестирование):

1 Отлично - 5 **2** Хорошо - 4 **3** Уд. -3 **4** Неуд. -2

КНОПКИ ВЫБОРА ОТВЕТА **КНОПКА ОЦЕНКИ**

Реальная оценка 0 Виртуальная оценка

8. Содержание и оформление отчета

7.1. Название работы

7.2. Цель работы.

7.3. Расчеты, таблицы и графики.

7.4. Вывод о соответствии теории и наблюдаемых экспериментальных фактов.

7.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Какие параметры характеризуют колебания тел?
2. Что называется резонансом?
3. Как реализуются силы сопротивления в практике?
4. Что называется свободными, вынужденными и затухающими колебаниями?

5. Что называется частотой, круговой частотой и вынуждающей частотой в колебательных процессах?
6. Как называется мера скорости затухания колебательного процесса?
7. Чем характеризуется резонансный режим колебаний?
8. Приведите условия возникновения колебаний в авиационных двигателях.

3.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 12

Тема: Исследование динамических реакций опорных подшипников вращающегося тела.

1. Цели лабораторной работы

1.1. Демонстрация статической и динамической уравновешенности ротора.

1.2. Демонстрация статической и динамической неуравновешенности ротора.

1.3. Экспериментальное определение динамических реакций опорных подшипников ротора в случае его статической неуравновешенности.

1.4. Экспериментальное определение динамических реакций опорных подшипников ротора в случае его динамической неуравновешенности.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Приобретение практических навыков по демонстрации статической и динамической уравновешенности и неуравновешенности ротора.

2.2. Приобретение практических навыков по определению динамических реакций опор ротора в случаях его статической и динамической неуравновешенности.

2.3. Овладение методиками экспериментального исследования и обработки полученных результатов.

3. Основные понятия теории динамического уравновешивания роторов

3.1. **Ротор** – твердое тело неизменяемой формы, которое может вращаться с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε вокруг своей оси. Примеры: турбина, компрессор в авиадвигателе, коленчатый вал в двигателе внутреннего сгорания, гироскоп, центрифуга и т.д.

3.2. Реакции опор ротора

Ротор может быть нагружен некоторой системой сил: сила тяжести ротора, силы давления воздуха на лопатки компрессора, электромагнитные силы, действующие на обмотки ротора электродвигателя и т.д.

Реакции опор A и B , вызываемые такими силами, называются **статическими реакциями** независимо от того, вращается ротор или нет.

Если ротор вращается, то каждая его частица имеет ускорение и, следовательно, силу инерции. Система сил инерции частиц ротора также создает реакции опор, которые называются **динамическими реакциями**. Такое название связано с тем, что эти реакции вызваны движением, т.е. динамикой ротора.

Векторная сумма статической и динамической реакций на каждой опоре дает так называемые **полные реакции** опор.

3.3. Дисбаланс.

В курсе теоретической механики доказывается, что тело любой формы имеет как минимум три главных центральных оси инерции. Главная центральная ось инерции (ГЦОИ) – прямая, проходящая через центр масс тела и обладающая тем свойством, что при вращении тела вокруг нее не возникают динамические реакции опор. Если тело имеет ось геометрической симметрии, то она одновременно является ГЦОИ. Например, ось однородного диска, проходящая через его центр перпендикулярно его плоскости, является ГЦОИ. В случае когда ГЦОИ параллельна оси вращения тела и находится от нее на расстоянии e (рис. 3.1), то при вращении диска массой m с постоянной угловой скоростью ω возникает главный вектор сил инерции $R^{\text{ин}} = m e \omega^2$, приведенный к началу координат O . Он вызывает динамические реакции опор \bar{N}_1 , и \bar{N}_2 . Сила $\bar{R}^{\text{ин}}$ является неуравновешенной силой инерции и ее принято называть **статической неуравновешенностью**, а прямо влияющие на ее величину параметры: $e, m e$, или $m g e$ (где $g = 9,8$ м/с² – ускорение силы тяжести) можно считать мерами статической неуравновешенности тела. В технической литературе чаще всего используется последний вариант

$$\Delta_c = m \cdot g \cdot e, \quad (3.1)$$

который имеет название «*статический дисбаланс*». При этом значение e иногда называют линейным дисбалансом.

Возможен случай, когда диск насажен так, что его центр лежит на оси вращения Oz , а ГЦОИ отклонена от нее на угол α (рис. 3.2).

В этом случае рассматривают две половины диска, разделенные осью Ox , перпендикулярной оси вращения. Равнодействующие сил инерции $\bar{\Phi}$ и $-\bar{\Phi}$ каждой половины равны друг другу по величине, противоположны по направлению и разнесены вдоль оси вращения на некоторое расстояние, т.е. образуют пару сил. Момент этой пары – главный момент сил инерции $M_x^{ин}$ – является неуравновешенным моментом и вызывает динамические реакции опор \bar{N} и $-\bar{N}$, также образующие пару сил. Момент $M_x^{ин}$ принято называть *динамической неуравновешенностью*. Можно показать, что при $\omega = \text{const}$

$$M_x^{ин} = J_{yz} \cdot \omega^2, \quad (3.2)$$

а порождающие ее параметры α и J_{yz} можно принять в качестве меры динамической неуравновешенности.

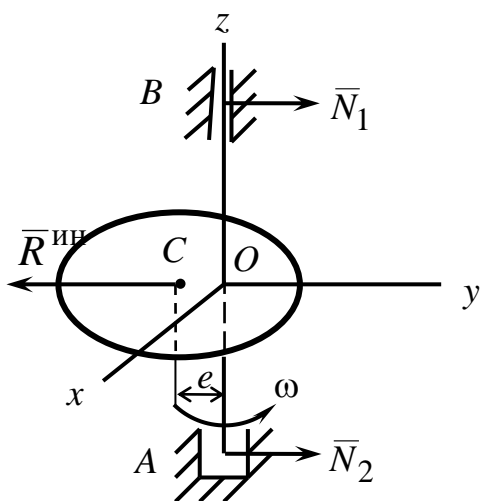


Рис. 3.1. Тонкий однородный круговой диск со статическим дисбалансом

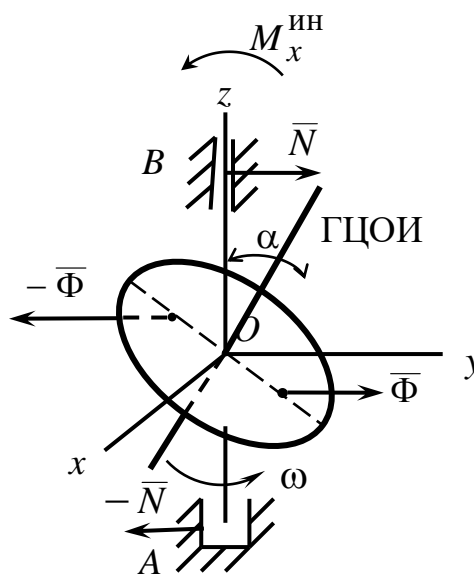


Рис. 3.2. Тонкий однородный круговой диск с динамическим дисбалансом

В технической литературе используется связанная с этими параметрами величина

$$\Delta_{\partial} = g \cdot \frac{J_{yz}}{e}, \quad (3.3)$$

которая называется «динамический дисбаланс». При этом угол α иногда называют угловым дисбалансом. Размер e назначается конструктивно (это может быть расстояние между опорами ротора, плоскостями крепления балансировочных грузов и другое). Такой выбор меры динамической неуравновешенности обусловлен удобством сравнения влияния на динамику ротора двух видов неуравновешенности, так как величины статического (3.1)

и динамического (3.3) дисбалансов имеют одинаковую размерность $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$.

Пусть изображенные на рис. 3.1 и 3.2 – тонкие однородные круговые диски имеют равные массы $m = 3,27$ кг и радиусы $r = 0,2$ м. Расстояния $AO = 0,5$ м, $OB = 0,3$ м, $e = 0,1$ мм = 10^{-4} м и угол $\alpha = 0,02$ рад. Диски вращаются равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 30000$ об/мин. Тогда путем несложных вычислений можно показать, что $\Delta_c \approx 0,00321$ $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$, $R^{\text{ин}} = 3224$ Н, $N_1 = 2015$ Н, $N_2 = 1209$ Н и $\Delta_\delta = 0,00802$ $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$,

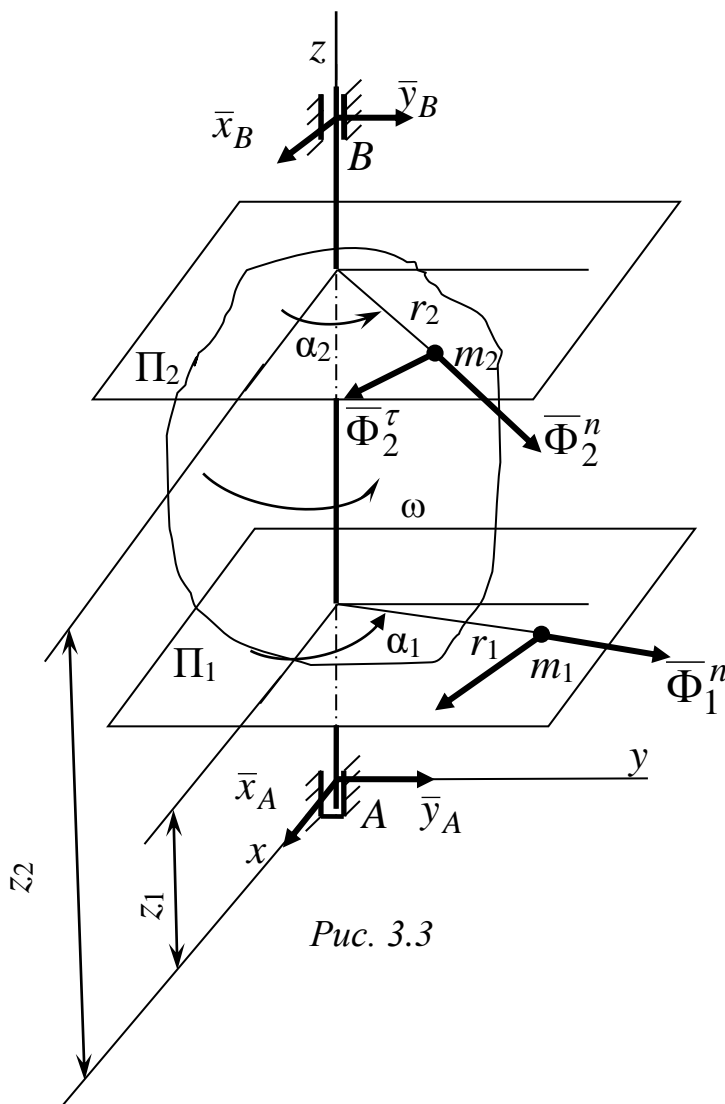


Рис. 3.3

$M_x^{\text{ин}} = 6448$ Нм, $N = 8060$ Н. Здесь при вычислении значения динамического дисбаланса Δ_δ по формуле (3.3) принято $l = AB = 0,8$ м.

Если диск не имеет линейного и углового дисбалансов, то динамические реакции равны нулю и диск является **уравновешенным**. Тело произвольной формы также может оказаться уравновешенным. При изготовлении любого ротора из-за случайных

неоднородностей материалов и погрешностей обработки при выполнении геометрических размеров, изготовленный ротор обязательно оказывается неуравновешенным.

3.4. Эквивалентный дисбаланс. Неуравновешенный ротор с произвольным дисбалансом вызывает все возможные динамические реакции опор $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{x}_B, \bar{y}_B$ показанные на рис. 3.3. В направлении оси Az динамическая реакция равна нулю, т.к. силы инерции всех частиц ротора лежат в плоскостях вращения частиц, т.е. перпендикулярны оси вращения.

Такой ротор заменяют эквивалентной схемой, включающей в себя:

- уравновешенный ротор с теми же геометрическими размерами, массой, осевыми моментами инерции и центром масс, лежащим на оси Az ;
- две точечные массы m_1 и m_2 , закрепленные на роторе, расположенные в плоскостях Π_1, Π_2 , перпендикулярных оси Az и имеющие координаты $m_1(r_1, \alpha_1, z_1), m_2(r_2, \alpha_2, z_2)$ во вращающейся вместе с ротором системе координат $Axyz$.

Эти массы имитируют дисбаланс реального ротора и называются **эквивалентным дисбалансом ротора**.

Критерием эквивалентности является одинаковость динамических реакций опор реального ротора и его эквивалентной схемы.

При его вращении на каждой массе возникает тангенциальная $(\bar{\Phi}_1^\tau, \bar{\Phi}_2^\tau)$ и нормальная $(\bar{\Phi}_1^n, \bar{\Phi}_2^n)$ силы инерции:

$$\Phi_1^n = m_1 \omega^2 r_1; \Phi_1^\tau = m_1 \varepsilon r_1; \Phi_2^n = m_2 \omega^2 r_2; \Phi_2^\tau = m_2 \varepsilon r_2. \quad (3.4)$$

Таким образом, условия эквивалентности имеют вид уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} x: X_A + X_B + \Phi_1^n \cos \alpha_1 + \Phi_2^n \cos \alpha_2 + \Phi_1^\tau \sin \alpha_1 + \Phi_2^\tau \sin \alpha_2 &= 0; \\ y: Y_A + Y_B + \Phi_1^n \sin \alpha_1 + \Phi_2^n \sin \alpha_2 - \Phi_1^\tau \cos \alpha_1 - \Phi_2^\tau \cos \alpha_2 &= 0; \\ m_x: -Y_B \cdot AB - \Phi_1^n \sin \alpha_1 z_1 - \Phi_2^n \sin \alpha_2 \cdot z_2 + & \\ + \Phi_1^\tau \cos \alpha_1 \cdot z_1 + \Phi_2^\tau \cos \alpha_2 \cdot z_2 &= 0 \\ m_y: X_B \cdot AB + \Phi_1^n \cos \alpha_1 \cdot z_1 + \Phi_2^n \cos \alpha_2 \cdot z_2 + & \\ + \Phi_1^\tau \sin \alpha_1 \cdot z_1 + \Phi_2^\tau \sin \alpha_2 \cdot z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.5. Динамическое уравнивание ротора

Чем больше величины реакций опор, тем ниже долговечность опорных подшипников. Кроме того, реакции опор вызывают вибрацию корпуса, в котором опоры закреплены и это тоже обычно считается вредным явлением. Снижение реакций опор ротора является важной научно-технической задачей, а мероприятия по ее решению являются составной частью технологии при производстве двигателей, приборов и других конструкций, содержащих роторы и называются динамическим уравниванием ротора. При решении этой задачи следует иметь в виду, что статические реакции не устранимы, так как вызваны силами, присутствие которых в работающей машине является обязательным и вызвано самой конструкцией машины. Снизить и даже почти полностью устранить можно только динамические реакции.

Очевидно, что реальный ротор будет уравновешен, если к нему прикрепить две массы m_3 , m_4 , равные по величине массам m_1 , m_2 и расположенные в плоскостях Π_1 , Π_2 диаметрально противоположно им. Однако задача динамического уравнивания осложняется тем, что у ротора реальной конструкции не в любом месте можно прикреплять массы m_3 , m_4 . В связи с этим при конструировании ротора в его чертеж специально закладываются так называемые плоскости коррекции Π_3 , Π_4 , в которых можно располагать массы m_3 , m_4 , называемые **уравнивающими массами или балансировочными грузами**.

Теперь считаем, что, во-первых, имеются четыре массы – две массы эквивалентного дисбаланса и две уравнивающих массы и, во-вторых, после прикрепления к ротору уравнивающих масс он уравновешен, т.е. динамические реакции стали равны нулю. Учитывая эти соображения на основании (3.5), получаем формулы, справедливые для уравновешенного ротора

$$x: \Phi_1^n \cos \alpha_1 + \Phi_2^n \cos \alpha_2 + \dots + \Phi_4^n \cos \alpha_4 + \Phi_1^\tau \sin \alpha_1 + \Phi_2^\tau \sin \alpha_2 + \dots \\ \dots + \Phi_4^\tau \sin \alpha_4 = 0;$$

$$y: \Phi_1^n \sin \alpha_1 + \Phi_2^n \sin \alpha_2 + \dots + \Phi_4^n \sin \alpha_4 - \Phi_1^\tau \cos \alpha_1 - \Phi_2^\tau \cos \alpha_2 - \dots \\ \dots - \Phi_4^\tau \cos \alpha_4 = 0;$$

$$m_x : -\Phi_1^n \sin \alpha_1 \cdot z_1 - \Phi_2^n \sin \alpha_2 \cdot z_2 - \dots - \Phi_4^n \sin \alpha_4 \cdot z_4 + \Phi_1^\tau \cos \alpha_1 \cdot z_1 + \Phi_2^\tau \cos \alpha_2 \cdot z_2 + \dots + \Phi_4^\tau \cos \alpha_4 \cdot z_4 = 0 \quad (3.6)$$

$$m_y : \Phi_1^n \cos \alpha_1 \cdot z_1 - \Phi_2^n \cos \alpha_2 \cdot z_2 + \dots - \Phi_4^n \cos \alpha_4 \cdot z_4 + \Phi_1^\tau \sin \alpha_1 \cdot z_1 + \Phi_2^\tau \sin \alpha_2 \cdot z_2 + \dots + \Phi_4^\tau \sin \alpha_4 \cdot z_4 = 0$$

Подставляя в (3.6) формулы (3.4) для сил инерции и заменяя

$$r_k \cos \alpha_k = x_k, \quad r_k \sin \alpha_k = y_k, \quad k=1, \dots, 4, \quad (3.7)$$

Получаем систему (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 (m_1 x_1 + \dots + m_4 x_4) + \varepsilon (m_1 y_1 + \dots + m_4 y_4) &= 0; \\ \omega^2 (m_1 y_1 + \dots + m_4 y_4) + \varepsilon (m_1 x_1 + \dots + m_4 x_4) &= 0; \\ -\omega^2 (m_1 y_1 z_1 + \dots + m_4 y_4 z_4) + \varepsilon (m_1 x_1 z_1 + \dots + m_4 x_4 z_4) &= 0; \\ \omega^2 (m_1 x_1 z_1 + \dots + m_4 x_4 z_4) + \varepsilon (m_1 y_1 z_1 + \dots + m_4 y_4 z_4) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так как ротор должен оставаться уравновешенным при любых ω и ε , то для этого следует потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + \dots + m_4 x_4 &= 0; \\ m_1 y_1 + \dots + m_4 y_4 &= 0; \\ m_1 x_1 z_1 + \dots + m_4 x_4 z_4 &= 0; \\ m_1 y_1 z_1 + \dots + m_4 y_4 z_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Система (3.9) вместе с формулами (3.6) позволяет при измеренном или заданном дисбалансе $m_1(\alpha_1, r_1, z_1)$, $m_2(\alpha_2, r_2, z_2)$ и заданных массах балансировочных грузов m_3 , m_4 и положении плоскостей коррекции z_3 , z_4 , определить координаты точек закрепления балансировочных грузов на роторе $\alpha_3, r_3, \alpha_4, r_4$.

При выполнении технологической операции по балансировке ротора в производственных условиях используются специальные балансировочные машины (станки), на которых измеряется эквивалентный дисбаланс ротора.

3.6. Исследуем динамические реакции опорных подшипников ротора, состоящего из однородной прямоугольной рамки с прикрепленными к ней четырьмя однородными цилиндрическими грузами, каждый из которых имеет массу m (рис. 3.4). Рамка вращается вокруг ее оси Az материальной симметрии с постоянной угловой скоростью ω . На рисунке: L , l – размеры, определяющие габариты рамки; l_1 и l_2 – расстояния от рамки до опор A и B , h – высота цилиндрических грузов.

На рис. 3.4 в точках рамы, где расположены центры тяжести грузов, действуют неуравновешенные центробежные силы инерции, величины которых определяются по формуле

$$\Phi = m\omega^2 l. \quad (3.10)$$

Эти силы инерции направлены в стороны, противоположные центростремительным ускорениям центров тяжести грузов. Отметим, что изображенная на рис. 3.4 система прямоугольных декартовых координат $Axuz$ неизменно связана с рамкой и вращается вместе с ней. Суммарный момент $M_y^{\text{ин}}$ сил инерций, равен алгебраической сумме моментов двух пар сил $(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi})$ соответственно с плечами $2L-h$ и h :

$$M_y^{\text{ин}} = \Phi(2L-h) - \Phi h = 2\Phi(L-h) = 2\omega^2 l(L-h). \quad (3.11)$$

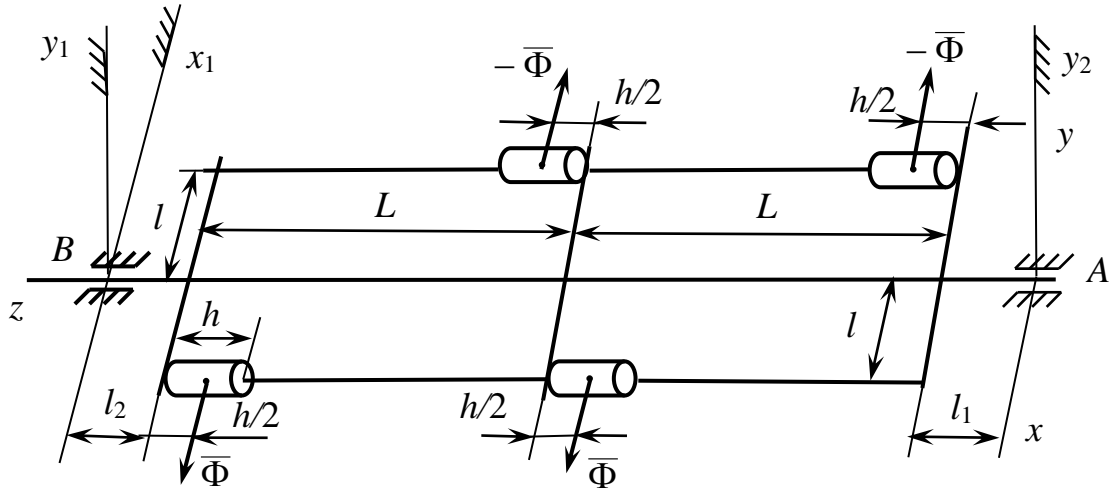


Рис. 3.4. Рамка и четыре цилиндрических груза с равными массами статически уравновешены, но динамически не уравновешены

Динамические реакции опор \bar{N}_A^∂ и \bar{N}_B^∂ , которые образуют пару сил.

Очевидно, что

$$N_A^\partial = N_B^\partial = M_y^{\text{ин}} = \frac{2m\omega^2(L-h)}{2L+l_1+l_2}. \quad (3.12)$$

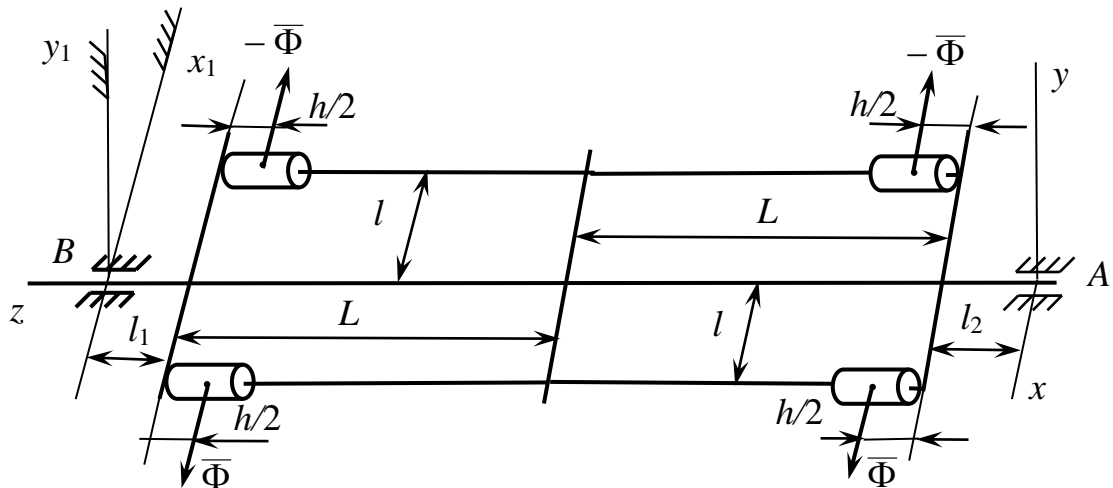


Рис. 3.5. Рамка и четыре цилиндрических груза с равными массами статически и динамически уравновешены

Если все четыре цилиндрических груза расположены на рамке симметрично относительно оси вращения Az , как это показано на рис. 3.5, то в этом случае имеют место статическая и динамическая уравновешенности и $\bar{N}_A^\partial = \bar{N}_B^\partial = 0$.

В другом случае, когда по одну сторону от оси вращения остается, например, только один цилиндрический груз (рис. 3.6), то имеет место статическая и динамическая неуровновешенности.

Из этого рисунка видно, что сила инерции $\bar{\Phi}$ создает относительно оси Ay момент

$$M_y^{\text{ин}} = \Phi(2L + l_1 - h/2) = m\omega^2 l(2L + l_1 - h/2), \quad (3.13)$$

который уравновешивается моментом динамической реакции \bar{N}_B^d . Следовательно:

$$N_B^\partial = \frac{M_y^{\text{ин}}}{2L + l_1 + l_2} = m\omega^2 l \frac{2L + l_1 - h}{2L + l_1 + l_2}. \quad (3.14)$$

Тогда из уравнения условного равновесия, например, в виде суммы проекций всех сил на ось Ax получаем

$$N_A^\partial = \Phi - N_B^\partial = m\omega^2 l \frac{l_2 + h/2}{2L + l_1 + l_2}. \quad (3.15)$$

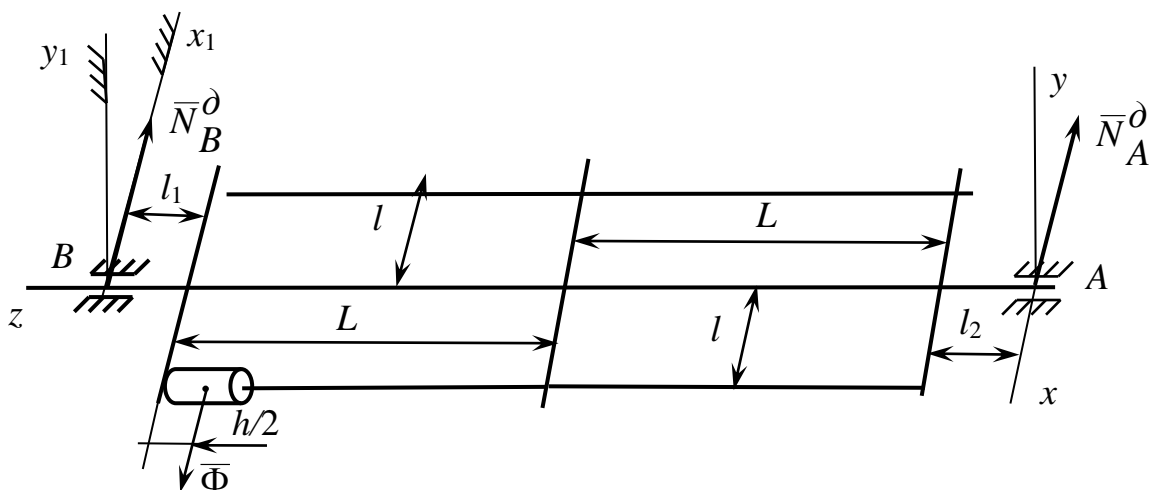


Рис. 3.6. Рамка и один цилиндрический груз статически и динамически не уравновешены

4. Оборудование

4.1. Автоматизированный комплекс для изучения динамических реакций ТМл 06М.

4.2. Блок электромеханический.

4.3. Блок управления.

5. Устройство и принцип работы установки

5.1. Схема автоматизированного комплекса изображена на рис. 6.1. Комплекс выполнен в настольном варианте и включает в себя: блок электромеханический I, блок управления II и ПЭВМ. Блок электромеханический состоит из основания 1 с регулирующими опорами 2 по уровню 3; стойки левой 4 с узлом измерения линейных перемещений 5, выполненным в виде индуктивного датчика линейных перемещений конца рамки в горизонтальной плоскости. Положение левого конца рамки 6 регулируется натяжением пружин 7. Крепление правого конца вращающейся рамки с опорой 8 позволяет ее поворот на небольшой угол в горизонтальной плоскости. Рамка состоит из центрального вала 5, двух стержней 9 и трех рычагов 10. На стержнях винтами фиксируются съемные грузы 11, а на центральном валу стопорными винтами фиксируются две втулки 12 для крепления сменных пластин различной конфигурации. На правом конце центрального вала рамки закреплен шкив 13, связанный ременной передачей с ведущим шкивом 14, жестко сидящим на валу электродвигателя 15. На кронштейне стойки 8 установлен оптоэлектрический датчик 16 числа оборотов рамки.

Управление электроприводом установки для изменения частоты вращения рамки осуществляется с блока управления II.

5.2. Принцип работы установки основан на явлении возникновения горизонтальных колебаний вращающейся рамки с грузами под действием неуравновешенных центробежных сил инерции.

6. Подготовка и порядок выполнения лабораторной работы

6.1. Расположить установку на ровной горизонтальной поверхности стола и отрегулировать по уровню с помощью опор положение основания установки в горизонтальной плоскости. Зафиксировать опоры контргайками.

6.2. Установить на компьютер прилагаемое программное обеспечение и соединить электромеханический блок с блоком управления и ПЭВМ соответствующими кабелями, а шнур электропитания блока управления подключить к сети 220В 50 Гц.

6.3. Нажать кнопку «СЕТЬ» на задней панели блока управления. Если загорается индикаторная лампа, то это означает: установка готова к работе.

6.4. Расположить четыре груза симметрично на стержнях рамки, как это показано на рис. 3.5, привести рамку во вращение включением электродвигателя с блока управления нажатием соответствующей кнопки. Контроль частоты вращения рамки вести по цифровому табло на передней панели блока управления. Убедиться в том, что рамка с грузами вращается плавно, левая опора *B* не перемещается. Рамка с грузами статически и динамически уравновешена. Динамические реакции в опорах *A* и *B* равны нулю.

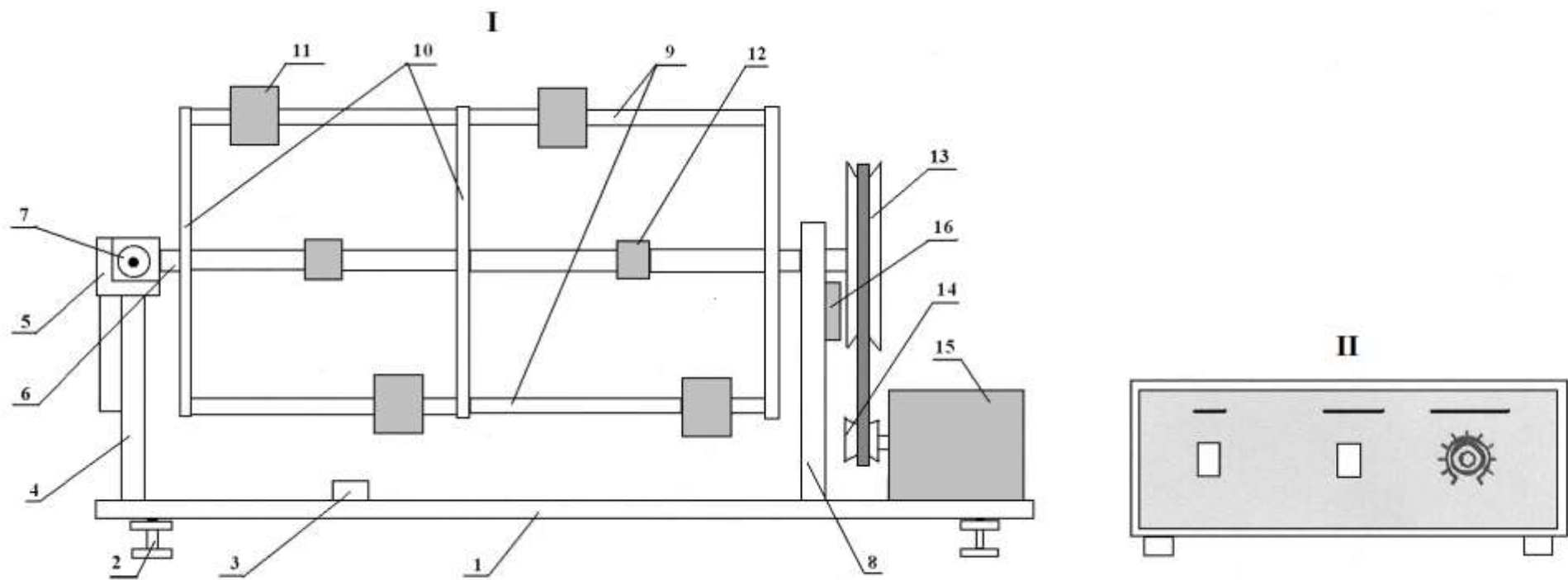


Рис. 6.1. Схема автоматизированного комплекса ТМл 06М для изучения динамических реакций:
 1 – основание; 2 – регулируемые опоры; 3 – уровень; 4 – стойка левая; 5 – узел измерения линейных перемещений;
 6 – рамка; 7 – пружины; 8 – опора правая; 9 – стержни; 10 – рычаги; 11 – съемные грузы; 12 – втулки; 13 – шкив;
 14 – ведущий шкив; 15 – электродвигатель; 16 – оптоэлектрический датчик числа оборотов рамки

6.5. Установить грузы несимметрично, т.е. два груза на одном стержне сдвинуть вправо, а на другом – влево (рис. 3.4).

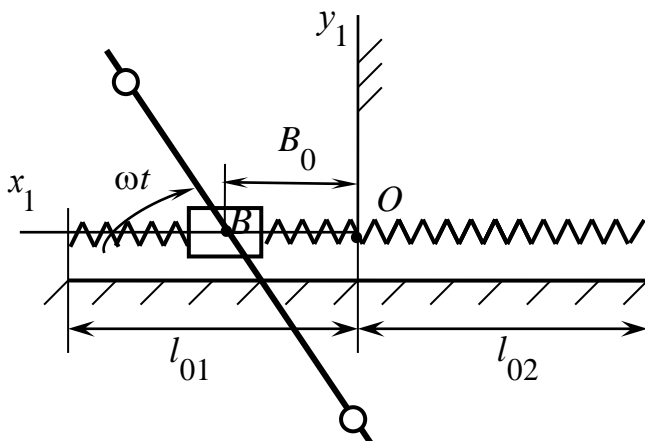


Рис. 6.2. Схема крепления опоры B

Убедиться в том, что рамка с грузами начинает «бить», левая опора B совершает колебательные движения в горизонтальной плоскости. Конструктивно опора B рамки прикреплена к двум пружинам (рис. 6.2) и может совершать движения по направляющим вдоль неподвижной оси Vx_1 . Очевидно, что движения опоры B происходят под действием горизонтальной

составляющей силы N_{Bx_1} реакции опоры N_B :

$$N_{Bx_1} = m\omega^2 \frac{l(L-h)}{2L+l_1+l_2} \cos \omega t. \quad (6.1)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – угловая скорость рамки, а f – частота ее вращения, индицируемая на цифровом табло передней части блока управления.

Следует подчеркнуть, что из-за движения опоры B вдоль неподвижной оси Vx_1 рамка с грузами кроме вращения вокруг оси Az , совершает переносное вращение вокруг неподвижной оси Ay_1 , перпендикулярную плоскости, и проходящей через точку A и неподвижную горизонтальную ось Vx_1 . В настоящем практикуме силами инерции, обусловленными последним вращением рамки с грузами, пренебрегается. Также не учитывается влияние силы трения скольжения при движении опоры B .

Таким образом, амплитуду B_0 колебательных движений опоры B можно считать прямо пропорциональной наибольшей величине динамической реакции N_B^∂ :

$$B_0 = N_B^\partial / c, \quad (6.2)$$

где $c = 6600$ Н/м – суммарный коэффициент упругости пружин.

6.6. Привести рамку с грузами во вращение и, варьируя ω , построить экспериментальный график зависимости амплитуды

колебательных движений опоры B от круговой частоты вращения ω . Далее построить такой же, но теоретический график, используя равенства (3.12) и (6.2). Расчеты проводить при следующих значениях основных параметров: $m = 0,59$ кг, $l_1 = l_2 = 0,042$ м, $L = 0,178$ м.

Сравнить экспериментальный и теоретический графики $B_0(\omega)$.

6.7. Установить на рамке только один груз, как это показано на рис. 3.6. Убедиться в том, что рамка с грузом начинает «бить» и левая опора B совершает колебательные движения вдоль неподвижной оси Bx_1 . Так же, как и в пункте 6.6, построить экспериментальный и теоретический графики зависимости амплитуды колебательных движений опоры B от круговой частоты вращения ω . Очевидно, что для построения теоретического графика следует использовать равенства (3.15) и (6.2).

Другие варианты размещения грузов изображены на рис. 6.3.

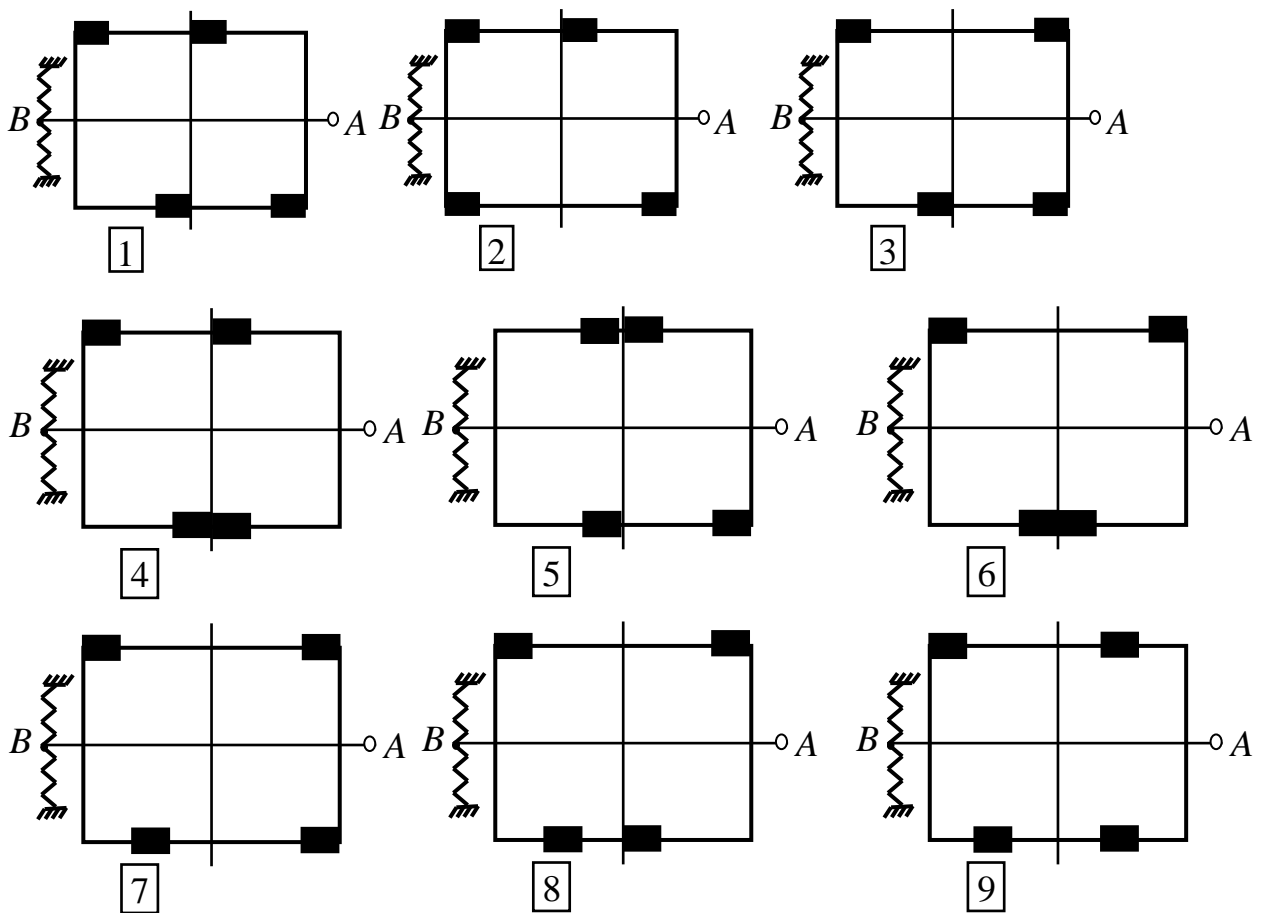


Рис. 6.3. Схемы размещения грузов на рамке

7. Содержание и оформление отчета

7.1. Название работы.

7.2. Цель работы.

7.3. Расчеты, таблицы и графики.

7.4. Вывод о соответствии теории и наблюдаемых экспериментальных фактов.

7.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры роторов.

2. Какие реакции опор ротора называются статическими?

3. Какие реакции опор ротора называются динамическими?

4. Что называется главной центральной осью инерции ротора?

5. Что называется статической неуравновешенностью ротора?

6. Как называется мера статической неуравновешенности ротора?

7. Что называется динамической неуравновешенностью?

8. Как называется мера динамической неуравновешенности?

9. Приведите условия статической и динамической уравновешенностей ротора.

3.7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13

Тема: Статическое уравнивание роторов.

1. Цель лабораторной работы

1.1. Ознакомление с задачей статического уравнивания роторов, основными теоретическими положениями и понятиями.

1.2. Проведение эксперимента по статическому уравниванию ротора.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Приобретение практических навыков работы с лабораторной установкой по статическому уравниванию ротора.

2.2. Овладение методиками экспериментального исследования и обработки полученных результатов.

3. Краткие теоретические сведения

3.1. Полное динамическое уравнивание ротора начинается с определения его статического дисбаланса и последующего статического уравнивания. Рассмотрим ротор, изображенный на рис. 3.1. Обозначим буквой m массу ротора. Центр S тяжести ротора смещен от оси его вращения Oz на расстояние l . Поэтому ось Sz_1 – главная центральная ось инерции ротора. Следовательно, данный ротор статически неуравновешен. Для статической балансировки ротора необходимо прикрепить к нему балансировочный груз массы m_A . В данном случае балансировочный груз следует расположить в верхнем конце диаметра, проведенного через точки O и S . Масса m_A балансировочного груза должна быть подобрана так, чтобы суммарный статический момент этого груза и неуравновешенного ротора относительно плоскости Oxz был равен нулю:

$$m_A \frac{D}{2} - me = 0, \quad (3.1)$$

где D – наружный диаметр ротора.

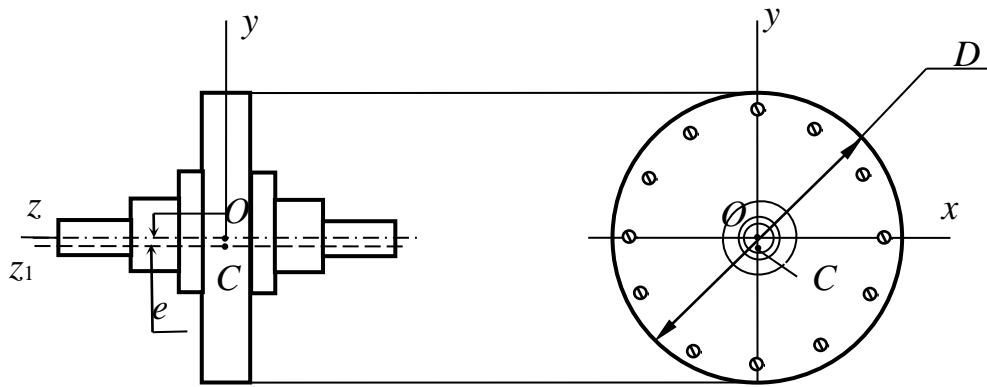


Рис. 3.1. Статическая неуравновешенность ротора:
 Oz – ось вращения ротора; Cz_1 – главная центральная ось
 инерции ротора; e – расстояние от центра тяжести ротора
 до его оси

4. Оборудование

4.1. Установка для балансировки тел вращения ТМ_Т 05М

4.2. Комплект принадлежностей: брусковый уровень, дробь, пластилин.

5. Устройство и принцип работы установки

5.1. Схема установки для статической балансировки тел вращения ТМ_Т05М изображена на рис. 5.1. Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из основания 1 с двумя призмами 2, регулируемые по высоте винтами 3. Горизонтальное положение граней призм регулируется брусковым уровнем из комплекта инструментов и принадлежностей. По направляющим граням призм может катиться ротор 4 (рис. 5.1).

5.2. Принцип работы установки основан на качении ротора из-за действия его силы тяжести при наличии статического дисбаланса. Статический дисбаланс ротора создается добавлением к его массе дроби, которая может насыпаться в любое из 12 отверстий, закрытых винтами 5. Ротор остановится, когда его центр тяжести займет наинизшее положение на вертикальной диаметральной прямой. Для статической балансировки ротора необходимо в точке его обода, совпадающей с противоположным концом диаметра, проведенного

через центр тяжести, прикрепить пластилин в количестве, обеспечивающем равновесие ротора на гранях призм.

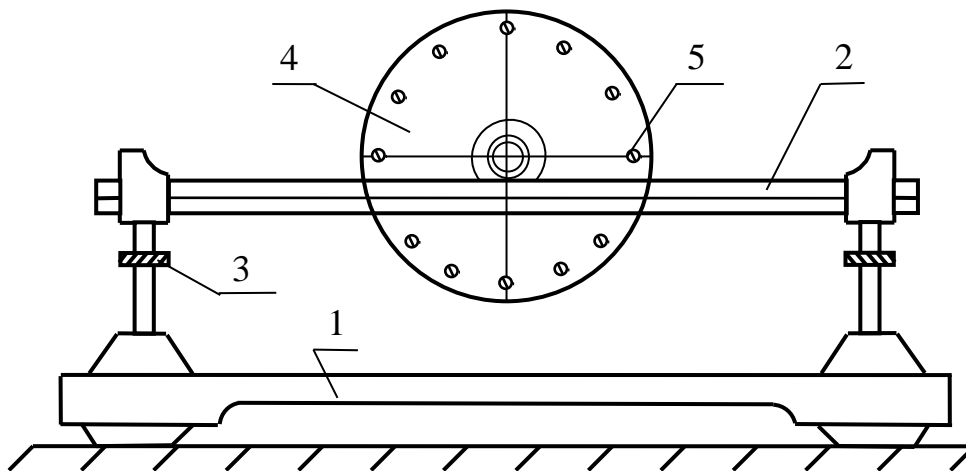


Рис. 5.1. Схема установки для балансировки тел вращения ТМТ05М:
1 – основание; 2 – призмы; 3 – регулировочные винты; 4 – ротор;
5 – винты ротора

К работе с установкой допускаются только студенты, ознакомленные с ее устройством, принципом действия и порядком проведения лабораторной работы.

6. Подготовка и порядок проведения лабораторной работы

6.1. Расположить установку на горизонтальной плоскости стола.

6.2. Отрегулировать с помощью уровня горизонтальное расположение граней призмы.

6.3. Насыпать дробь в одно из 12 отверстий ротора и закрыть винтом 5.

6.4. Взвесить ротор вместе с осью и измерить его наружный диаметр штангенциркулем. Записать значения массы m и наружного диаметра D .

6.5. Поместить ось ротора на горизонтальные призмы и в положении равновесия отметить его верхнюю точку на вертикальной диаметральной прямой. Повернуть ротор на 90° вокруг оси и снова отметить верхнюю точку ротора. Затем, повернув ротор в противоположную сторону на 90° , еще раз отметить его верхнюю

точку. Все три отметки или совпадут, или будут расположены очень близко.

6.6. Прикрепить к верхней отмеченной точке ротора кусочек пластины такой массы, чтобы повернутый на любой угол вокруг своей оси ротор находился в покое. Это означает, что ротор статически уравновешен.

6.7. Взвесить снятый с ротора пластилин и записать значение его массы m_A .

6.8. Вычислить расстояние e от центра тяжести ротора до его оси вращения по формуле

$$e = \frac{m_A}{m} \cdot \frac{D}{2}, \quad (6.1)$$

полученной из условия равенства нулю статического момента уравновешенного ротора относительно плоскости Oxz .

6.9. Вычислить величину статического дисбаланса $\Delta_c = mge$.

6.10. Все измеренные и вычисленные величины занести в таблицу.

6.11. Мероприятия, определенные пп. 6.3–6.10, выполнить еще три раза для различного количества насыпаемой дроби.

№ п/п	m , г	m_A , г	D , см	e , см	Δ_c , кгм ² с ⁻²
1					
2					
3					
4					

7. Содержание и оформление отчета

7.1. Название работы.

7.2. Цель работы.

7.3. Краткие теоретические сведения.

7.4. Заполненные таблицы и графики.

7.5. Выводы по работе.

7.6. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Приведите пример известных вам роторов в технике.

2. Какие составляющие реакций опор называются статическими?

3. Какие составляющие реакции опор называются динамическими?

4. Какие реакции опор называются полными?

5. Что называется статическим дисбалансом?

6. Что называется динамическим дисбалансом?

7. В каком случае динамические реакции равны нулю?

3.8. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14

Тема: Статическое и динамическое уравнивание роторов.

1. Цель лабораторной работы

1.1. Ознакомление с задачей уравнивания роторов, основными понятиями и теоретическими положениями для ее решения.

1.2. Экспериментальная проверка теории.

2. Задачи лабораторной работы

2.1. Приобретение практических навыков работы с лабораторной установкой по статическому и динамическому уравниванию роторов.

2.2. Овладение методиками экспериментального исследования и обработки полученных результатов.

3. Теоретические основы динамического уравнивания роторов

Основные положения теории динамического уравнивания роторов приведены в п. 3.1 – 3.6 к лабораторной работе №12 «Исследование динамических реакций опорных подшипников вращающегося тела».

4. Оборудование

4.1. Установка для уравнивания вращающихся масс ТММ-35.

4.2. Комплект принадлежностей: балансировочные грузы массами 40, 50, 60 и 70 г.

5. Устройство и принцип работы установки

5.1. Схема установки для уравнивания вращающихся масс ТММ-35 изображена на рис. 5.1. Установка выполнена в настольном варианте и включает в себя: ротор, фрикционный привод и основание со стойками *A* и *B*.

Ротор представляет собой вал 2, на который жестко посажен фрикционный диск 3 и свободно посажены пять алюминиевых дисков 4 на расстоянии 80 мм друг от друга. В осевом направлении диски ограничиваются кольцами 5, жестко закрепленными на валу. Кольца градуированы по образующей через один градус, а ступица дисков имеет риску, позволяющую установить каждый диск под необходимым углом. Фиксация дисков осуществляется винтами 6. Диски имеют по два сквозных паза, расположенные под углом 180°.

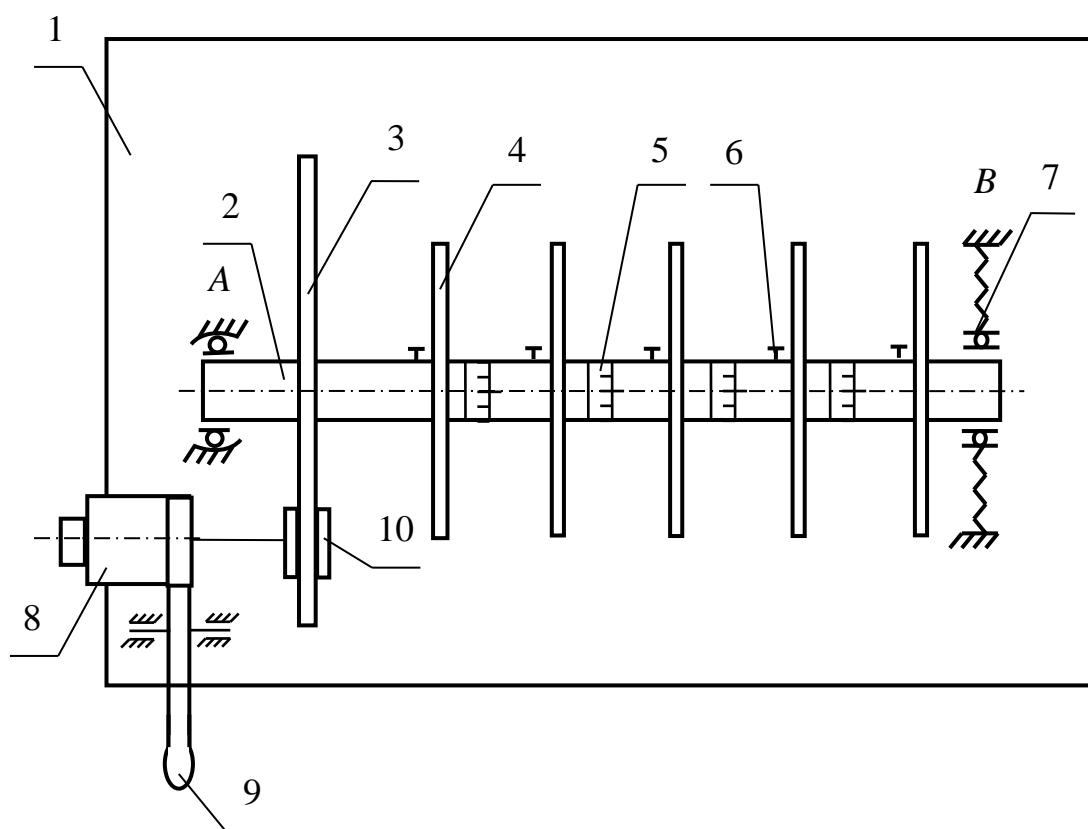


Рис. 5.1. Схема установки (вид сверху) для уравнивания вращающихся масс ТММ-35:

- 1 – основание с опорами *A* и *B*; 2 – вал; 3 – фрикционный диск;
- 4 – диск; 5 – кольцо; 6 – винт; 7 – каретка; 8 – электродвигатель;
- 9 – рычаг; 10 – шкив

На каждом диске, рядом с пазом для крепления грузов, привернута шкала, позволяющая установить груз на необходимом расстоянии от оси вращения вала. Вал с дисками смонтирован на двух стойках *A* и *B*. Левый конец вала закреплен в сферическом шарикоподшипнике, позволяющем валу, кроме вращательного движения, осуществлять поворот в горизонтальной плоскости; правый конец *B* вала закреплен в радиальном шарикоподшипнике каретки 7.

Вращение ротора осуществляется от электродвигателя 8 посредством фрикционной передачи. Электродвигатель смонтирован у левой стойки *A* на качающемся рычаге 9. Под рычагом установлена пусковая кнопка двойного действия. Нажатием на рукоятку рычага вниз шкив 10 прижимается к фрикционному диску и включается электродвигатель, разгоняющий ротор. При освобождении рукоятки, под действием силы тяжести электродвигателя, фрикцион отжимается и электродвигатель выключается.

Установка снабжена комплектом грузов массами 40, 50, 60 и 70 г., служащих для создания дисбаланса и для уравнивания.

5.2. Принцип действия установки основан на явлении возникновения горизонтальных колебаний ротора под действием неуравновешенных центробежных сил инерции.

6. Подготовка и порядок выполнения лабораторной работы

6.1. Расположить установку на ровной горизонтальной плоскости стола и подключить установку к электрической сети.

Без преподавателя установку не включать.

ВНИМАНИЕ! *При вращении дисков находиться в плоскости вращения грузов запрещается.*

6.2. Проверить статическую уравновешенность ротора без грузов, придавая ему несколько угловых положений (2–3) через 90° и убеждаясь в отсутствии самопроизвольной прокрутки из положения покоя.

6.3. Проверить динамическую уравновешенность ротора без грузов путем его раскрутки электромотором и наблюдения за колебаниями свободного конца оси ротора.

6.4. Выбрать систему координат $Oxuz$ привязанную к ротору, причем начало – точку O совместить с центром подшипника на закрепленном конце ротора, а ось Oz направить в сторону свободного конца.

6.5. Закрепить на роторе систему двух грузов №1 и №2 с эквивалентным дисбалансом $m_1(\alpha_1, r_1, z_1)$, $m_2(\alpha_2, r_2, z_2)$ по заданию преподавателя и в отчете выполнить эскиз системы «ротор-грузы» с указанием масс и координат каждого груза.

6.6. Провести статическую балансировку системы путем прикрепления к ротору третьего груза №3, масса которого берется равной одному из возможных дискретных значений масс набора грузов, приложенного к установке, а координаты третьего груза x_3, z_3 вычисляются из уравнений статической уравновешенности:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0;$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = 0.$$

Располагать уравновешивающий груз №3 можно на любом свободном диске.

6.7. Проверить статическую уравновешенность системы так же, как в п.6.2.

6.8. Привести статически уравновешенный ротор с тремя грузами во вращательное движение и убедиться по колебаниям его свободного конца в отсутствии динамической уравновешенности.

6.9. Остановить ротор, снять груз № 3, оставив на местах грузы № 1 и № 2 и раскруткой ротора повторно убедиться в отсутствии уравновешенности исходной системы «ротор-грузы».

6.10. Выбрав диски для закрепления балансировочных грузов (не совпадающие с плоскостями неуравновешенных грузов № 1 и № 2) рассчитать величины статических моментов m_3x_3 , m_3y_3 , m_4x_4 , m_4y_4 по уравнениям:

$$m_1x_1 + \dots + m_4x_4 = 0;$$

$$m_1y_1 + \dots + m_4y_4 = 0; \tag{6.1}$$

$$m_1x_1z_1 + \dots + m_4x_4z_4 = 0;$$

$$m_1y_1z_1 + \dots + m_4y_4z_4 = 0.$$

6.11. Выбрав массы двух уравновешивающих грузов рассчитать координаты точек закрепления балансировочных грузов на роторе $\alpha_3, r_3, \alpha_4, r_4$.

6.12. Закрепить уравнивающие грузы на роторе и убедиться в отсутствии статического дисбаланса (в статике) и в отсутствии динамического дисбаланса системы (по колебаниям вращающейся системы).

6.13. Отключить установку от электрической сети.

7. Содержание и оформление отчета

7.1. Название работы.

7.2. Цель работы.

7.3. Задание по каждому пункту раздела «Порядок выполнения работы» и запись результатов выполнения этого задания, в том числе эскизы и расчеты.

7.4. Вывод о соответствии теории и наблюдаемых экспериментальных фактов.

7.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Какие реакции опор называются статическими?
2. Какие реакции опор называются динамическими?
3. Какие реакции опор называются полными?
4. Какую силу принято называть статической неуравновешенностью?
5. Какой параметр называется статическим дисбалансом?
6. Какой момент принято называть динамической неуравновешенностью?
7. Какой параметр называется динамическим дисбалансом?
8. Какое тело является уравновешенным?
9. Что называется эквивалентным дисбалансом ротора?
10. Какие плоскости называются плоскостями коррекции?
11. Какие грузы называются балансирующими?
12. Приведите условия статической и динамической неуравновешенности тела?

3.9. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 15

Тема: Изучение гироскопических явлений.

Введение. В связи с широким использованием гироскопов в современной технике, вопросы, связанные с ознакомлением студентов различных направлений и специальностей с основными свойствами гироскопов, а также с применением гироскопических приборов и устройств в различных отраслях промышленности являются весьма актуальными.

В практикуме дано краткое изложение приближенной теории гироскопов, необходимое для понимания их свойств, причин возникновения регулярной прецессии и умения определять гироскопические моменты. Далее предусмотрена экспериментальная часть работы, в которой изучаются гироскопические явления и проверяются выполняемые расчеты на демонстрационных приборах и лабораторной установке.

Для повышения качества и степени усвоения материала предусмотрен программированный контроль усвоения отдельных вопросов занятия, проводимый после выполнения экспериментальной части лабораторного практикума. Предложены вопросы, работа над которыми закрепляет и углубляет знания основных моментов приближенной теории гироскопа.

Время, необходимое для проведения лабораторной работы, составляет 4 часа.

1. Цели и задачи работы

1. Изучение приближенной теории гироскопических явлений.
2. Практическое знакомство с основными свойствами гироскопов на специальных демонстрационных моделях.
3. Экспериментальное исследование прецессии гироскопа. Определение угловой скорости его собственного вращения.

2. Краткое изложение приближенной теории гироскопов

Гироскопом называют симметричное тело, быстро вращающееся вокруг своей оси симметрии и имеющее одну неподвижную точку на этой оси.

Примером гироскопа может служить волчок, имеющий неподвижную точку O (рис. 2.1). Всем знакомо свойство, которым обладает закрученный вокруг собственной оси Oz волчок – он не падает под действием силы тяжести на плоскость, на которой находится, а совершает еще одно движение – его ножка вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . Это вращение называется прецессией, и происходит она потому, что рассматриваемый волчок является неуравновешенным.

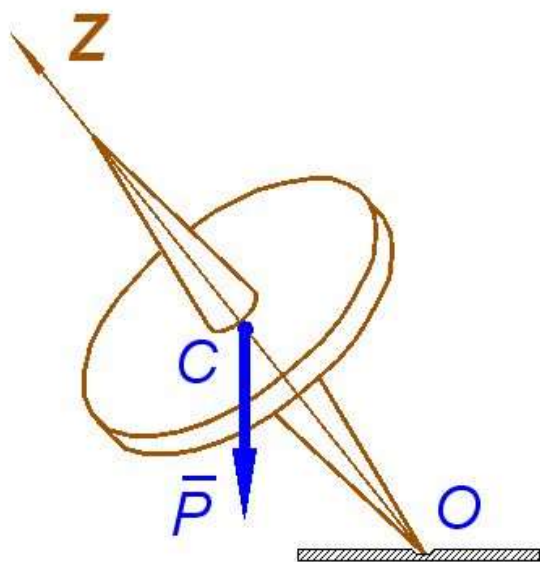


Рис. 2.1

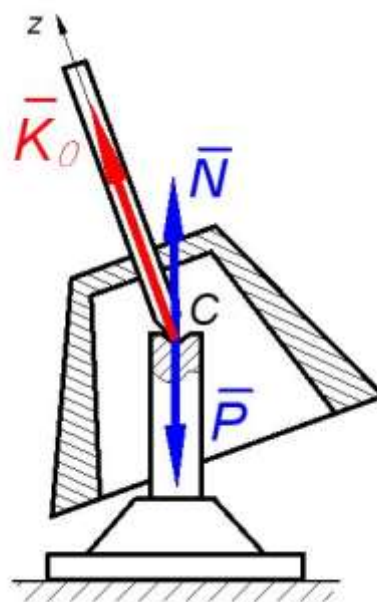


Рис. 2.2

В технике применение находят *уравновешенные* или *свободные* гироскопы, у которых центр тяжести (центр масс или центр инерции) совпадает с неподвижной точкой. Поскольку сила тяжести (а в других случаях силы инерции) не создают момента относительно неподвижной точки, то ось таких гироскопов, выставленная в определенном направлении в пространстве, не совершает прецессии (будет строго доказано ниже), в чем и заключается основное свойство гироскопов, используемых в промышленности. Примером

уравновешенного гироскопа является колоколообразный волчок (рис. 2.2).

В различного рода гироскопических приборах закрепление гироскопа осуществляется с помощью *карданова подвеса* (рис. 2.3). Благодаря симметрии самого гироскопа и его опор, а также симметрии опор внутреннего и наружного колец, центр масс гироскопа оказывается на пересечении трех осей: оси гироскопа, оси внутреннего кольца и оси внешнего кольца, то есть в неподвижной точке. В технике кольца, как правило, выполняются в виде рамок (рис. 2.4).

Если у гироскопа в кардановом подвесе закрепить наружную рамку, то получим гироскоп с двумя степенями свободы. Ротор такого гироскопа имеет возможность вращаться только вокруг своей оси симметрии и оси внутренней рамки.

Большая угловая скорость собственного вращения гироскопа обеспечивается с помощью высокоскоростных гидродвигателей (гиромоторов).

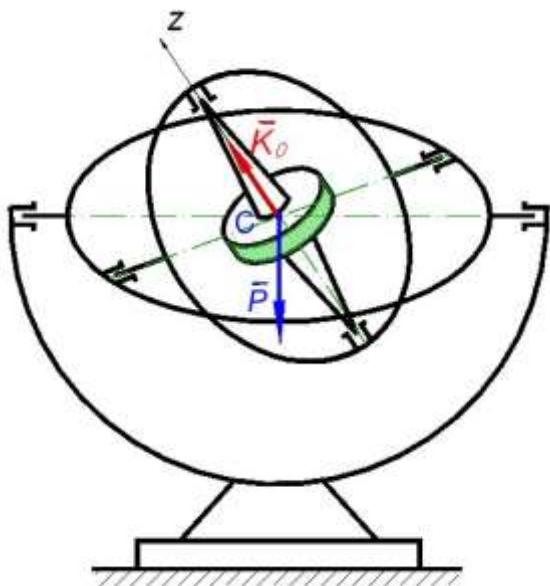


Рис. 2.3

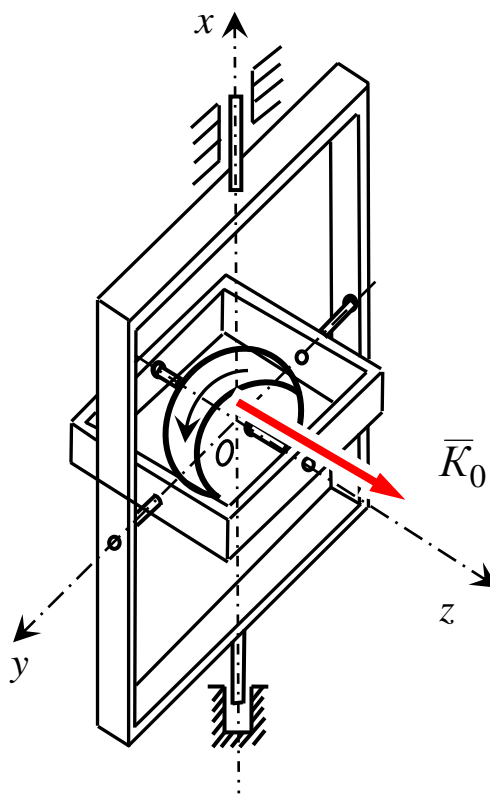


Рис. 2.4

Преимущественное распространение в гироскопическом приборостроении получили электрические гидродвигатели, угловая скорость которых обычно составляет 2000–3000 рад/с. Иногда

применяют гиродвигатели, скорость собственного вращения которых достигает величины порядка 6000 рад/с (≈ 60000 об/мин). Кроме электрических гиродвигателей в специальных видах гироскопов используются газовые, пиротехнические и механические гиродвигатели.

Гироскоп как тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Его движение, как правило, задается с помощью трех углов Эйлера (рис. 2.5) в неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$. Подвижная система координат $Oxyz$ неизменно связана с волчком. Линия OL получена пересечением плоскостей Oxy и Ox_1y_1 называется линией узлов. Угол φ между линией узлов и осью Ox называется углом собственного вращения, ось этого вращения – ось Oz . Угол ψ между осью Ox_1 и линией узлов называется углом прецессии. При изменении угла прецессии происходит поворот собственной оси гироскопа Oz вокруг неподвижной оси Oz_1 . Угол θ между осями Oz и Oz_1 называется углом нутации. При изменении угла нутации происходит поворот вокруг линии узлов OL .

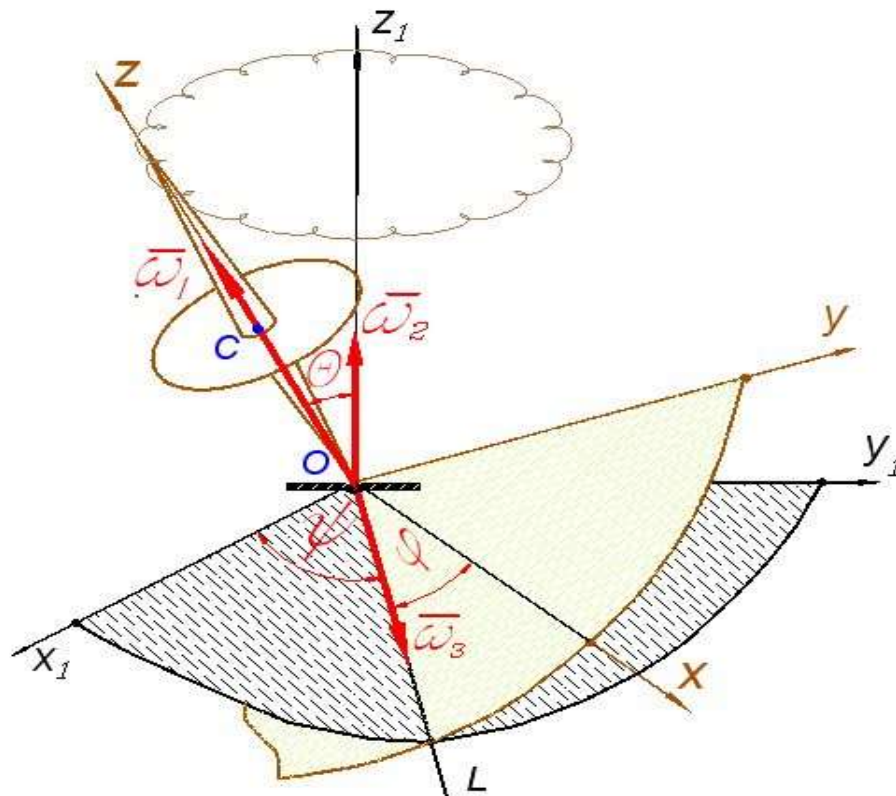


Рис. 2.5

Таким образом, движение гироскопа описывает следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(t); \\ \psi &= \psi(t); \\ \theta &= \theta(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Дифференцированием этих функций по времени, находятся:

$\dot{\varphi} = \omega_1$ – угловая скорость собственного вращения, вектор $\bar{\omega}_1$ лежит на оси Oz ;

$\dot{\psi} = \omega_2$ – угловая скорость прецессии, вектор $\bar{\omega}_2$ лежит на оси Oz_1 ;

$\dot{\theta} = \omega_3$ – угловая скорость нутации, вектор $\bar{\omega}_3$ лежит на линии узлов OL .

В любой момент времени движение гироскопа можно рассматривать как вращательное с мгновенной угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \quad (2.2)$$

Так как по определению гироскоп – быстро вращающееся тело, то $\omega_1 \gg \omega_2$ и $\omega_1 \gg \omega_3$. На этом основании в приближенной теории принято кинетический момент гироскопа с достаточной степенью точности считать равным

$$\bar{K}_0 = J_z \cdot \bar{\omega}_1, \quad (2.3)$$

где J_z – момент инерции гироскопа относительно оси Oz .

Таким образом, вектор кинетического момента гироскопа \bar{K}_0 в приближенной теории рассматривается как вектор, лежащий на оси собственного вращения Oz (см. рис. 2.2–2.4).

На рис. 2.6 показан неуравновешенный гироскоп (волчок), у которого вектор кинетического момента \bar{K}_0 в выбранном масштабе показан как вектор \overline{OA} , лежащий на оси Oz собственного вращения.

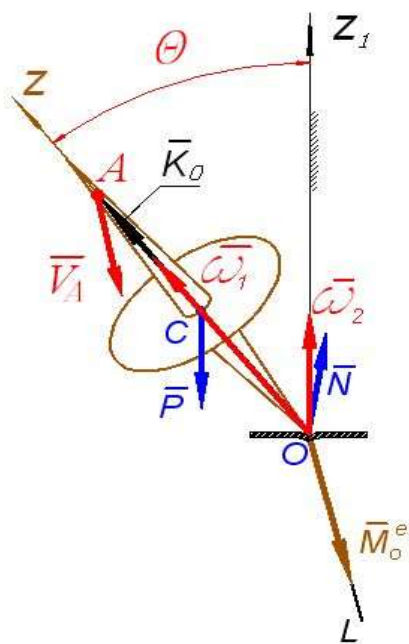


Рис. 2.6

Следует отметить, что, несмотря на принятое допущение в формуле (2.3), при объяснении свойств гироскопа пренебрегают только угловой скоростью нутации, а угловая скорость прецессии при этом учитывается.

3. Свойства гироскопов

Первые два свойства гироскопа можно объяснить, применяя к нему теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки O :

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^e, \quad (3.1)$$

здесь \bar{M}_0^e — главный момент всех внешних сил, приложенных к гироскопу. К внешним силам относится сила тяжести \bar{P} и опорная реакция \bar{N} (трением в опоре и сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Для уравновешенных гироскопов (рис. 2.2–2.4) $\bar{M}_0^e = 0$, поэтому

$$\bar{K}_0 = \overline{const}, \quad (3.2)$$

т.е. модуль и направление кинетического момента относительно неподвижной точки O постоянны, и, так как \bar{K}_0 все время направлен по оси гироскопа, то эта ось не изменяет своего направления.

Это и есть первое свойство: ***Ось свободного или уравновешенного гироскопа сохраняет неизменным направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета.***

А теперь выясним, как будет двигаться ось (это движение ранее мы уже назвали прецессией) неуравновешенного гироскопа (рис. 2.6) при действии на него \bar{M}_0^e . Этот момент создается в рассматриваемом случае силой тяжести \bar{P} относительно точки O . Вектор \bar{M}_0^e приложен в точке O и лежит на линии узлов OL .

Далее, прибегаем к теореме Резаля, суть которой заключается в геометрической интерпретации теоремы об изменении кинетического

момента (3.1). Левую часть формулы (3.1) можно трактовать как скорость точки A – конца вектора кинетического момента \bar{K}_0 при его движении по годографу:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{V}_A, \quad (3.3)$$

здесь используется кинематическое определение скорости точки, положение которой задается радиус-вектором \bar{r} , только роль радиус-вектора исполняет вектор кинетического момента. В связи с этим размерность V_A не соответствует размерности обычной скорости.

Приравнивая правые части уравнений (3.1) и (3.3) получаем теорему Резаля

$$\bar{V}_A = \bar{M}_0^e, \quad (3.4)$$

т.е.: скорость конца вектора кинетического момента равна по величине и параллельна по направлению главному моменту всех внешних сил.

В соответствии с полученным результатом, видно, что точка A движется со скоростью \bar{V}_A параллельно вектору-моменту $\bar{M}_0^e = \bar{M}_0(\bar{P})$, а это означает, ось гироскопа в этом направлении совершает прецессию.

Отсюда вытекает второе свойство: **Если на ось гироскопа будут действовать внешние силы, создающие момент относительно неподвижной точки, то эта ось будет прецессировать по направлению, которое имеет вектор-момент этих сил.**

Заметим, что, если в формуле (3.4) $\bar{M}_0^e = 0$, то и $\bar{V}_A = 0$.

Откуда следует вывод: **после прекращения действия силы движение оси гироскопа мгновенно прекращается, т.е. прецессионное движение гироскопа безынерционное.**

Третье свойство: **Ось гироскопа практически не реагирует на удары.**

Так как удар – кратковременное действие силы (десятые доли секунды), то за этот малый промежуток времени гироскоп не успевает отклониться на заметный угол. В этом проявляется свойство устойчивости оси быстро вращающегося гироскопа.

Из всех свойств гироскопа самым основным является 1-е свойство: способность сохранять неизменным направление своей оси в пространстве.

Это свойство свободного гироскопа широко используется в технике в двух направлениях: первое – в приборах служащих для управления и коррекции движения объекта, его ориентации и навигации (например, авиакомпас в самолетах и вертолетах); второе – в устройствах, применяющихся для стабилизации объектов в пространстве (например, гиродины для правильной ориентации космических аппаратов и станций в их полете).

Следует также знать, что большинство космических объектов, в том числе все звезды и планеты, вращаясь вокруг своих осей, являются своего рода гироскопами. Они также обладают основным свойством, так как, несмотря на небольшие угловые скорости, их кинетические моменты велики (2.2) за счет огромных моментов инерции. Благодаря этому в космосе сохраняется относительный порядок, в том числе на нашей Земле сохраняется жизнь.

4. Регулярная прецессия неуравновешенного гироскопа

Рассмотрим неуравновешенный гироскоп, у которого центр тяжести не совпадает с неподвижной точкой, например волчок, показанный на рис. 2.6. Если угол θ , составляемый его осью Oz с вертикальной осью Oz_1 не равен 0, то, как было показано, гироскоп будет совершать прецессию. В случае отсутствия трения ось гироскопа будет описывать коническую поверхность, вращаясь вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Это движение оси симметрии гироскопа называется регулярной прецессией. Определим ее угловую скорость.

Для этого скорость точки A выразим с одной стороны, как точки, вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси Oz :

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_0 = \bar{\omega}_2 \times J_z \bar{\omega}_1 = J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1), \quad (4.1)$$

или по модулю

$$V_A = J_z \omega_1 \omega_2 \sin(\theta). \quad (4.2)$$

С другой стороны, скорость точки A найдем из формулы (3.4):

$$\bar{V}_A = \bar{M}_0^e = \bar{m}_0(\bar{P}) = \overline{OC} \times \bar{P},$$

или по модулю

$$V_A = OC \cdot P \cdot \sin(\theta). \quad (4.3)$$

Приравняв правые части (3.6) и (3.7):
 $V_A = J_z \omega_1 \omega_2 \sin(\theta) = OC \cdot P \cdot \sin(\theta)$, получаем для угловой скорости регулярной прецессии

$$\omega_2 = \frac{OC \cdot P}{J_z \omega_1}. \quad (4.4)$$

5. Гироскопический момент

Рассмотрим ротор, вращающийся с постоянной по величине угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг своей оси симметрии Oz , укрепленной с помощью подшипников в рамке, которая в свою очередь вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси Ox (рис. 5.1).

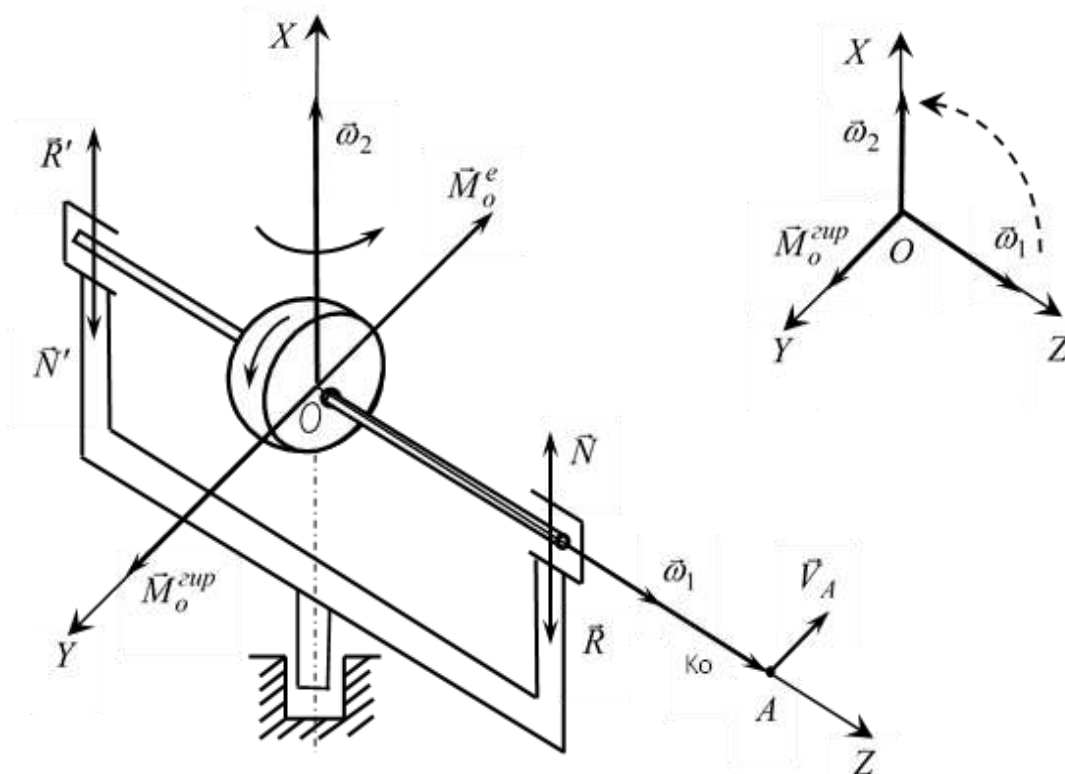


Рис. 5.1

Так как главная ось гироскопа совершает прецессию, то конец вектора \bar{K}_0 (точка A) имеет скорость \bar{V}_A , определяемую равенством (3.4). Момент внешних сил \bar{M}_0^e , под действием которого происходит прецессия, создается силами \bar{R} и \bar{R}' , приложенными к валу ротора со стороны подшипников. Так как центр O тяжести гироскопа

неподвижен, то силы \bar{R} и \bar{R}' образуют пару, момент \bar{M}_0^e которой направлен так же, как и скорость \bar{V}_A . На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что со стороны гироскопа на подшипники будут действовать силы \bar{N} , \bar{N}' , равные по модулю и направленные противоположно силам \bar{R} и \bar{R}' (рис. 5.1). Момент этих сил \bar{M}_0 , $M_0^{\text{гир}}$ относительно неподвижной точки O , равный по величине и противоположный по направлению моменту \bar{M}_0^e , называется **гироскопическим моментом**

Таким образом, гироскопический момент $M_0^{\text{гир}}$ можно представить как момент гироскопической пары сил (\bar{N}, \bar{N}') , с которой гироскоп действует на тела, принуждающие его прецессировать под действием момента внешних сил \bar{M}_0^e . Так как, то из формул (4.1, 4.3) следует, что

$$M_0^{\text{гир}} = -\bar{\omega}_2 \times \bar{K}_0 = \bar{K}_0 \times \bar{\omega}_2 = J_z \cdot (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2). \quad (5.1)$$

Отсюда найдем модуль гироскопического момента:

$$M_0^{\text{гир}} = J_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin(\overset{\wedge}{(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)}), \quad (5.2)$$

где $(\overset{\wedge}{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2})$ – угол между осью собственного вращения и осью прецессии (рис. 5.1). Так как в рассматриваемом случае этот угол прямой, то

$$M_0^{\text{гир}} = J_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin 90^\circ = J_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (5.3)$$

Гироскопический момент при этом направлен вдоль оси Oy , расположенной в горизонтальной плоскости, и как бы стремится совместить главную ось гироскопа с осью прецессии (рис. 5.1). Слова, «как бы стремится» подчеркивают то обстоятельство, что гироскопический момент приложен не к гироскопу, а к подшипникам ротора.

Из формулы (5.2) следует, что гироскопический момент может быть равным нулю, если угловая скорость прецессии отсутствует или если главная ось гироскопа параллельна оси прецессии.

Для определения направления гироскопического момента удобно пользоваться правилом Фуко–Жуковского: **гироскопический**

момент направлен так, что он как бы стремится кратчайшим путем совместить главную ось гироскопа с осью прецессии и совместить так, чтобы векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ совпали. Момент перпендикулярен плоскости, проходящей через ось прецессии и главную ось гироскопа.

Заметим, что гироскопическая пара, кроме давления на подшипники, в которых вращается вал ротора, может вызвать движение того тела, с которым скреплены эти подшипники (если это движение допускается наложенными связями). Например, пусть наружная рамка гироскопа жестко укреплена на основании, которому сообщим угловую скорость $\bar{\omega}_2$ (рис. 5.2). Пара сил (\bar{N}, \bar{N}') , момент которой равен возникающему гироскопическому моменту, будет поворачивать внутреннюю рамку в направлении кратчайшего пути совмещения вектора $\bar{\omega}_1$ угловой скорости собственного вращения гироскопа с вектором $\bar{\omega}_2$ угловой скорости вынужденной прецессии.

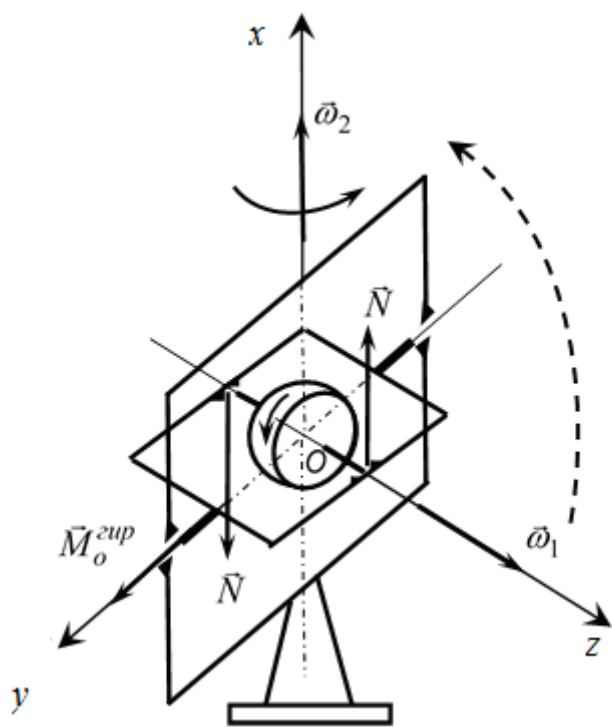


Рис. 5.2

Результат, к которому приводит действие гироскопической пары сил, называется гироскопическим эффектом. Гироскопические эффекты обнаруживаются при исследовании взаимодействий между быстровращающимися телами (двигатели и винты самолетов и вертолетов, колеса машин, роторы электродвигателей и турбин) и подшипниками, в которых установлены оси этих тел. Гироскопические давления могут достигать значительных величин и должны учитываться при соответствующих расчетах

опор.

6. Проведение опытов

6.1. Экспериментальное исследование регулярной прецессии гироскопа на лабораторной установке

Гироскоп представляет собой электрический гиromотор с массивным ротором, заключенный в кожух 1 (рис. 6.1). Кожух гиromотора насажен на легкую металлическую трубку 2 так, что ось ротора гироскопа совпадает с осью трубки. Трубка может свободно вращаться вокруг горизонтальной и вертикальной осей. Вдоль трубки может перемещаться груз 3, с помощью которого система уравнивается. Кольцо 7 служит для создания небольшого момента. Питание гиromотора осуществляется от сети переменного тока частотой 400 Гц и напряжением 36 В.

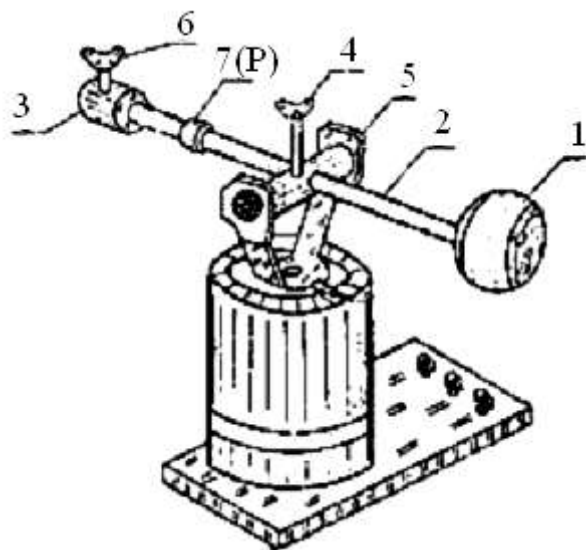


Рис. 6.1

1. До включения гиromотора уравновесить систему посредством малых перемещений груза 3. При этом кольцо 7 расположить около горизонтальной оси 5. Добившись горизонтального расположения оси трубки, винтом 6 закрепить груз 3.

2. Попросить преподавателя включить гироскоп. Необходимо выждать 3–5 минут для того, чтобы скорость вращения ротора стала номинальной. О том, что гироскоп уравновешен, т.е. $M_o^e = 0$, судить по отсутствию прецессии.

3. Убедившись в том, что нет прецессии и что ось гироскопа уравновешена горизонтально, легким движением руки переместить кольцо 7 на некоторое расстояние l от точки опоры.

Гироскоп начнет прецессировать. С помощью секундомера измерить время t поворота трубки вокруг вертикальной оси на угол φ . Цена деления лимба 15 град. Угловую скорость прецессии определить по формуле:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{18^\circ} \cdot \frac{\varphi}{t}.$$

Замерить линейкой расстояние l , а затем повторить эксперимент для двух других произвольных значений l .

4. Определить угловую скорость ω_1 и число оборотов n_1 ротора, зная массу кольца 7 ($m = 22,5 \cdot 10^{-3}$ кг) и момент инерции ротора гироскопа ($J_z = 1,76 \cdot 10^{-4}$ кг·м²).

$$\omega_1 = \frac{P}{J_z} \cdot \frac{l}{\omega_2}, \quad n_1 = \frac{3^\circ}{\pi} \cdot \omega_1, \quad \frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

5. Результаты свести в таблицу.

Таблица

№	l , м	P , Н·м	φ , град	t , с	$J_z \cdot \omega_2$, кг·м ² /с	ω_1 , с ⁻¹	n_1 , об/мин
1							
2							
3							

7. Программированный контроль усвоения отдельных вопросов занятия

7.1. Укажите неверно записанную формулу гироскопического момента.

- 1) $\overline{M}_0^{\text{гир}} = J_z \cdot (\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2)$; 2) $\overline{M}_0^{\text{гир}} = (\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2) \cdot J_z$;
 3) $\overline{M}_0^{\text{гир}} = J_z \cdot (\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1)$; 4) $\overline{M}_0^{\text{гир}} = (J_z \cdot \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2)$.

7.2. Укажите неверно записанную формулу модуля гироскопического момента (θ – угол между векторами $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$).

- 1) $M_0^{\text{гир}} = J_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2})$;
- 2) $M_0^{\text{гир}} = J_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\widehat{\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2})$;
- 3) $M_0^{\text{гир}} = \omega_1 \cdot J_z \cdot \omega_2 \cdot \cos(90^\circ - \theta)$;
- 4) $M_0^{\text{гир}} = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot J_z \cdot \sin(\theta)$.

7.3. В каком случае (рис. 7.1) колесный скат оказывает большее давление на левый рельс?

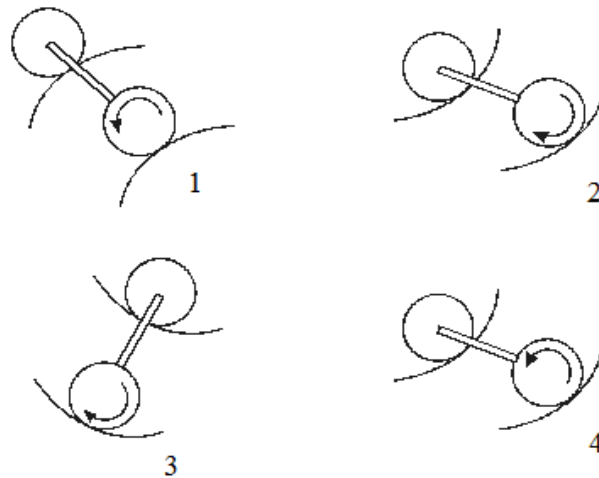


Рис. 7.1

7.4. Укажите, в каком случае при вираже, происходящим с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, самолет будет переходить в пикирование под действием гироскопического момента (рис. 7.2).

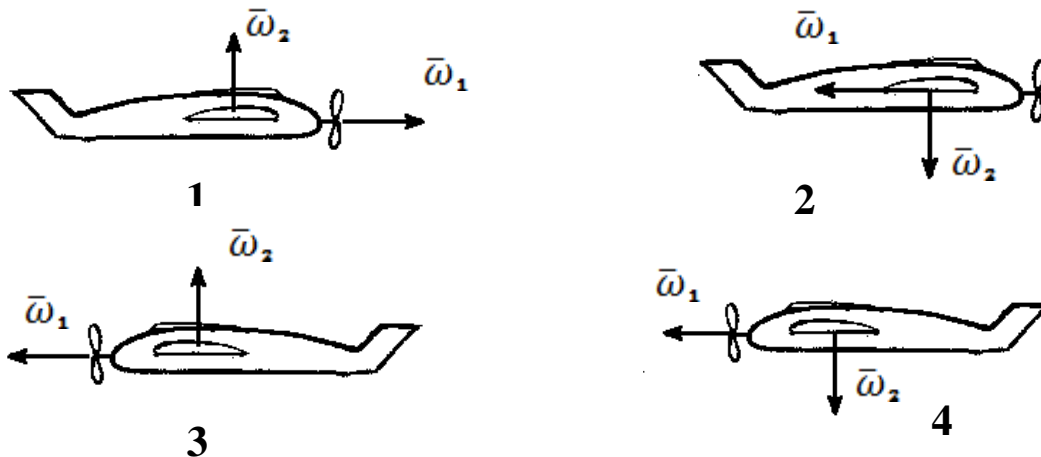


Рис. 7.2

7.5. Укажите неверно найденное направление угловой скорости прецессии (рис. 7.3).

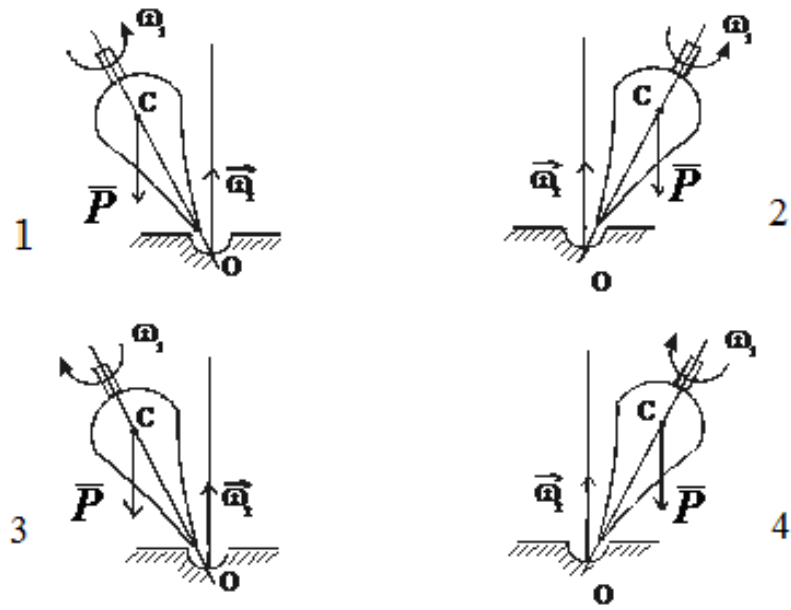


Рис. 7.3

7.6. Укажите верно найденное направление угловой скорости прецессии (рис. 7.4).

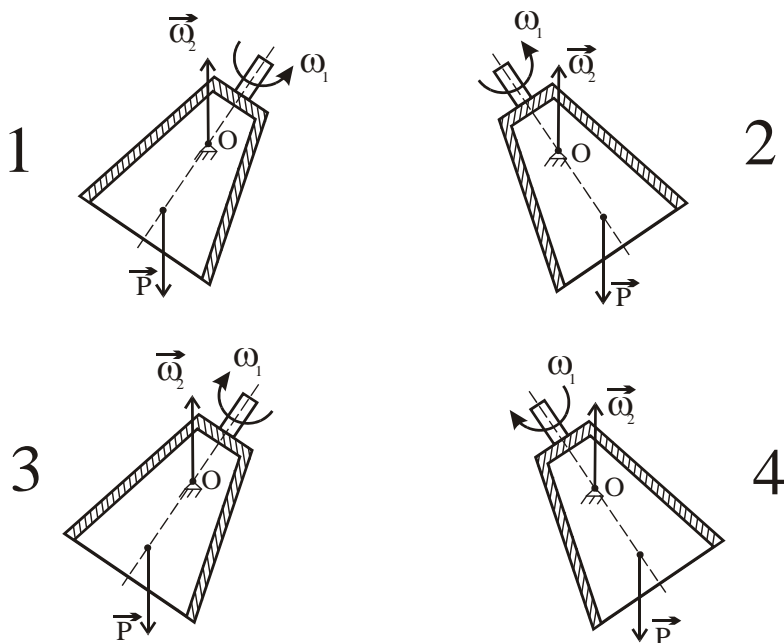


Рис. 7.4

7.7. Укажите неверно найденное направление угловой скорости прецессии гироскопа под действием силы P (рис. 7.5).

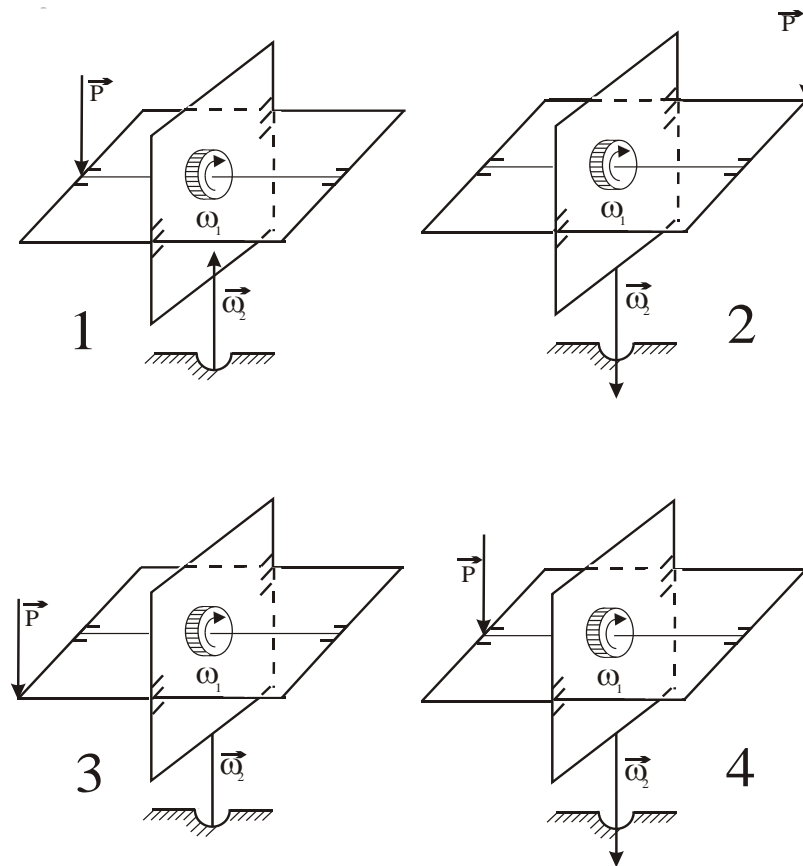


Рис. 7.5

7.8. В каком случае ось гироскопа, установленного в кардановом подвесе (рис. 7.6), не будет реагировать на вращение Земли?

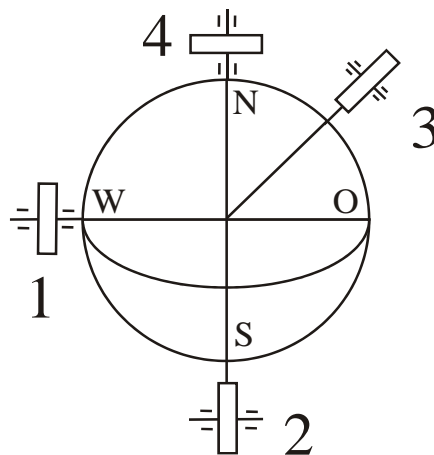


Рис. 7.6

7.9. Укажите неверно указанное направление гироскопического момента гироскопа, установленного на рамке, вращающейся вокруг продольной оси (рис. 7.7).

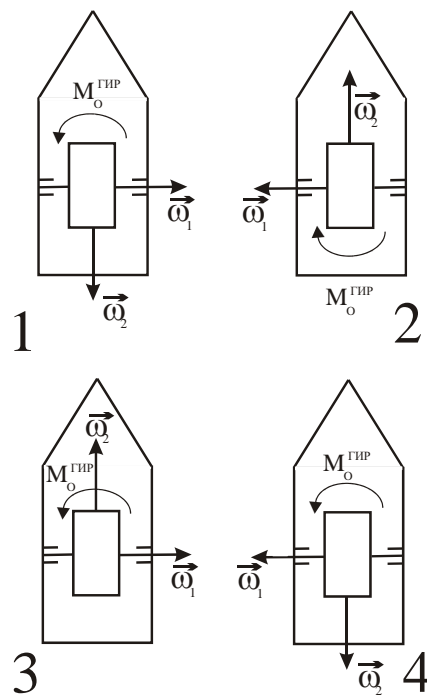


Рис. 7.7

7.10. Укажите неверно найденное направление гироскопического момента (рис. 7.8).

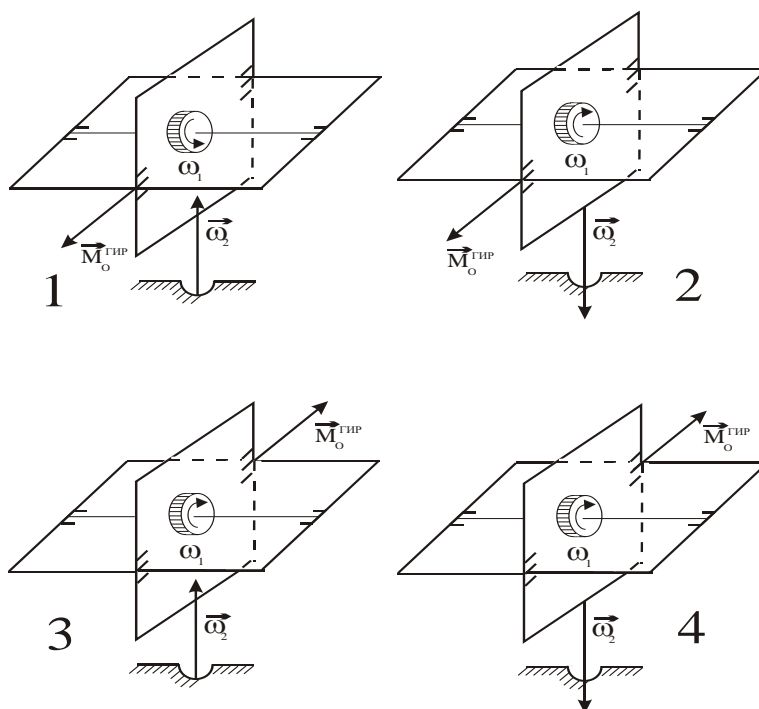


Рис. 7.8

Список литературы для самостоятельной проработки тем

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В двух томах. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 736 с.
2. Дронг В. И., Дубинин В. В., Ильин М. М., и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов. – М.: Издательство МГТУ имени Баумана Н.Э., 2000. – 736 с. (Серия «Механика в техническом университете»: Т.1).
3. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика: учебное пособие. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 603 с.
4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник. – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.
5. Терешин В. Г. Основы механики гироскопов. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 1998. – 223 с. (Монография депонирована в ВИНТИ 21.10.98, №3037 – В98).
6. Шестов С. А. Гироскоп на земле, в небесах и на море. – М.: Знание, 1989. – 192 с.